Les dossiers pédagogiques

l'éducateur

ICEM - FIMEM

Pédagogie Freinet

46-47-48

PREMIÈRE EXPÉRIENCE DE MATHÉMATIQUE LIBRE AU COURS ÉLÉMENTAIRE 1ère ANNÉE

par Paul LE BOHEC

SUPPLÉMENT
au numéro 7
d'Avril 1969

PREMIÈRE EXPÉRIENCE DE MATHÉMATIQUE LIBRE

AU COURS ÉLÉMENTAIRE 1ère année (1965-1966)

AVERTISSEMENT

" Freinet m'a demandé de réserver la relation de mon expédition mathématique au CE_1 pour " Documents de l'Institut ".

Je suis heureux du choix de cette publication un peu confidentielle car je puis y exposer sans détours, ni précautions ce que nous avons réalisé et pensé au cours de l'année. Du point de vue mathématique pur, mon travail comporte certainement des erreurs. Tranquillisons-nous : il y aura toujours des erreurs... ou des insuffisances.

Mais à mon avis, c'est d'abord *sur le plan pédagogique qu'il faut raisonner juste. Le reste suivra tout seul. Et nous saurons bien, un jour, acquérir tout de même un niveau mathématique acceptable.*

Mais l'acquisition d'une culture pédagogique *des maths sera plus laborieuse car, dans la nouvelle conception, il se trouve que peu de gens ont fait le chemin et nous n'avons pas beaucoup d'aide à attendre de personne.*

C'est pour cette raison que je vous soumets ma tentative. S'il s'en dégageait un parfum de vérité pédagogique assez grand pour que vous éprouviez le besoin de vous constituer en équipes, j'aurai atteint mon but.

Je nous le souhaite.

Je m'excuse de la rapidité de rédaction de ce compte rendu d'expérience. Mais nous sommes pressés. Tel quel, il peut être utile.

Vous remarquerez aussi que je tape et retape lourdement et souvent sur les mêmes clous. C'est que j'ai rencontré des résistances et j'ai la tentation de prouver. Alors qu'il faudrait que chacun redécouvre.

Bons courages "

Voilà ce que j'écrivais, il y a trois ans. J'ai su depuis que, telle qu'elle avait été présentée, ma brochure avait rendu quelques services. Maintenant encore, il semble qu'elle puisse être utile. Pourtant, en la relisant, je la trouve affligée d'un défaut majeur : elle date. Malgré cela, je crois qu'on peut la diffuser à nouveau. En effet, elle introduit peu de termes nouveaux. Et ceci me paraît être une qualité, car les livres qui sont sur le marché sont tellement chargés de symboles que le lecteur est vite écoeuré. Et cela produit des blocages très regrettables. Les termes nouveaux étant peu nombreux, ils seront plus facilement assimilés. D'autant plus qu'ils sont continuellement accrochés à la vie. C'est pour cette raison, que malgré mon désir de rajeunissement, j'apporterai peu de corrections au texte initial.

Mais le lecteur qui aura eu la persévérance d'aller jusqu'au bout et qui voudra un supplément d'information trouvera une nourriture plus dense dans le récit de la seconde expérience. Elle est très récente puisqu'elle date du 1er trimestre 1968-1969. J'essaierai d'y serrer de plus près le langage moderne.

L'essentiel, à mes yeux, pour cette brochure, c'est d'être bien intégrée à la vie et à la psychologie des enfants et des maîtres.

P. LE BOHEC.

MATÉRIEL CUISENAIRE

Bien que l'ordre chronologique n'ait pas tellement d'importance, je commence par le matériel Cuisenaire. Peut-être, pour ne plus avoir à en parler. Juste avant la rentrée, j'avais eu en main, le livre de Madeleine Goutard " Les mathématiques et les enfants " que plusieurs camarades m'avaient recommandé. Ce livre m'avait intéressé. En effet, les réflexions pédagogiques de l'auteur avaient de quoi me plaire, bien que, à la lumière de l'expérience de l'Ecole Moderne, je sentisse qu'elles restaient en deçà de ce que nous pouvions espérer.

Ce qui me réjouissait également, c'était la promesse de résultats rapides, remarquables et même surprenants. Ce n'est pas que j'aie jamais été tenté par la recherche du spectaculaire pour lui-même. Seul, le spectaculaire qui recouvre une réalité profonde peut être accepté. Il ne faut pas le rejeter systématiquement : il peut aider à l'avancement des idées. De la surprise peut naître l'intérêt et la compréhension. A condition que les idées aient beaucoup de valeur.

Il faut bien reconnaître que, pour mener à bien l'expérience que je voulais tenter, je ne pouvais négliger aucun élément de sécurité.

Et, si certains de mes possibles opposants étaient assez peu perspicaces pour s'étonner de résultats inattendus, c'était toujours autant de gagné sur le plan de la diminution de mes angoisses préliminaires.

Mais, outre ces résultats qui pouvaient contribuer à alimenter ma sécurité et mon audace, je me félicitais de pouvoir aborder un peu plus, avec Madeleine Goutard, le domaine des mathématiques modernes au sujet desquelles je sentais que je ne saurais jamais assez.

Aussi, je lançai un appel à un camarade bien placé qui me prêta 5 boîtes ; ce qui se révéla suffisant. Et le dernier jour des vacances me vit sprinter, l'égoïne à la main, pour fabriquer un matériel collectif en contre-plaqué dans lequel l'unité valait un décimètre carré au lieu de un centimètre cube.

Avec ce matériel, je décidai de pratiquer une pédagogie de l'invention et de la découverte, ou, si l'on préfère une pédagogie " a posteriori ".

Naturellement, je ne faisais aucune leçon. Nous examinions simplement ensemble, soit avec le matériel individuel, soit avec le matériel collectif, les créations de chacun. Et peu à peu, nous progressions.

Ce qui me paraît intéressant, c'est que les nombres n'apparurent pas au début. En effet, à l'aide du symbolisme suivant, nous pouvions écrire toutes les égalités et inégalités que nous voulions. Pour faciliter la compréhension, j'en donne aussi la valeur en cm^3, ce que nous ne fîmes point ; au début, tout au moins.

1	2	3	4	5
blanc	rouge	vert	rose	jaune
b	r	v	R	j
6	7	8	9	10
vert foncé	noir	marron	bleu	orange
V	n	m	B	o

Pour obtenir des explications supplémentaires, vous pouvez vous reporter au livre de Madeleine Goutard.

INVENTION DE SIGNES ET DE CHIFFRES

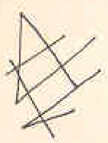
SIGNES

D'entrée nous débouchons sur des égalités du type : jaune + Rose = Bleu $(5 + 4 = 9)$. J'en donne la traduction numérique pour vous en faciliter la compréhension, mais je vous rappelle que les nombres n'intervinrent point.

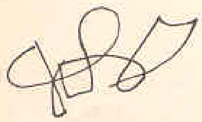
Mais comment écrire cela, que le jaune ajouté au rose a une longueur identique à celle de la réglette bleue. Pour le signe + nous n'avons pas eu à chercher parce que ce signe était connu depuis le C.P. Connu et même assimilé parce qu'il fait partie de la vie courante.

Pour " égal " nous avons " inventé " un signe. En effet, chez nous, c'est la classe qui invente les signes dont elle a besoin pour s'épargner de la fatigue et aller plus vite. Les enfants comprennent très bien ce souci de gagner du temps et, d'eux-mêmes, ils proposent des économies : n'est-ce pas cela, pour une bonne part, ce que l'on appelle mathématiser ?

Pour le signe " même longueur que " nous avons eu à choisir entre :


Jacques


Patrice


Pierrick


Rémi

Peu à peu, j'ai conduit au signe de Rémi. Pourquoi ?

- Parce qu'il est plus simple.

- Est-ce qu'on ne pourrait pas encore le simplifier ?

- Si, en gardant rien que le rond.

- Ou encore ?

- En supprimant le rond.

Les enfants ont dit :

- Ce signe, ça veut dire " pareil "
- ou encore ?

- égal. Mais on le connaissait déjà.

- Oui, vous le connaissiez. Mais vous venez de le réinventer.

J'étais tenu, pour des raisons de communication avec le reste de la société de leur faire adopter le signe et le mot usuels. A la maternelle, puisque les choses comptent plus que les signes, et parce qu'on n'est pas pressé, j'aurais peut-être accepté que l'on jouât plus longtemps avec les créations écrites et parlées des enfants. Mais au CE_1, pour cela du moins, je ne pouvais plus me le permettre.

Cependant, les enfants ont vu néanmoins que les signes et les mots étaient des créations humaines et qu'elles n'étaient pas nées de rien ou descendues du ciel.

A propos de cette égalité $j + R = B$, et à propos de tout, je pourrais craindre les mathématiciens. En effet, à les fréquenter un peu, je me suis aperçu qu'ils remettaient tout en cause. Et même les choses les plus simples. Pour un peu, on serait paralysé au point de ne plus pouvoir dire un mot. (Cela est d'ailleurs valable pour tous les spécialistes).

Heureusement, pour mon CP-CE_1, comme pour moi, cette première approximation nous suffit bien. Elle nous permet déjà de faire un bout de chemin. Quand mes enfants seront en seconde et quand je serai agrégé de maths, nous verrons à analyser plus finement les choses. En attendant ce futur très lointain, nous nous contentons de ce qui est encore communément accepté, tout en nous efforçant de progresser toutes les fois que nous pourrons, avec l'aide des profs de maths, qui trouveront en nous des gens d'une touchante bonne volonté.

Il nous a fallu aussi trouver un signe pour exprimer :

" il y a une différence entre "

Nous avons eu :

Jacques
(trop long)

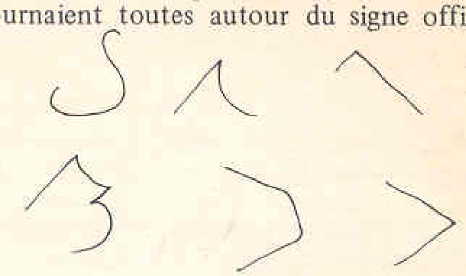
Robin
(confusion avec
orange = o)

Patrice
(confusion
avec S)

Jacques II
(très bien
très rapide)

Patrice
(parfait)

Nous avons aussi cherché un signe pour les inégalités et, par chance, les inventions tournaient toutes autour du signe officiel.

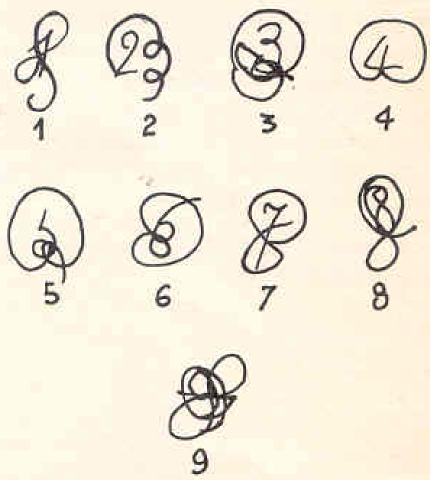


En partant de la bouche qui s'ouvrait du côté du plus gros gâteau, les enfants ont très bien retenu ce signe.

Pour la multiplication et la division, nous avons eu les signes classiques.

CHIFFRES

Et comme il faut s'attendre à tout, un jour, j'ai trouvé sur le carnet de recherches de Jacques la création suivante :



Ses chiffres étaient dérivés des chiffres arabes. Les autres enfants l'ont remarqué puis, pendant un moment, ils n'ont fait que cela.

Voici quelques-unes de leurs créations (les premiers nombres)

Patrice 

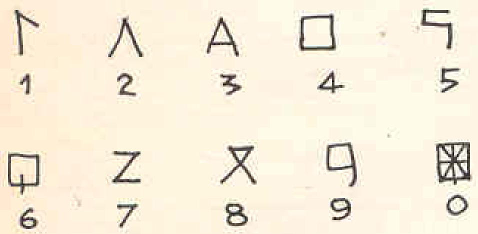
Rémi 

J. F. 

Je regrette de ne pouvoir présenter ici que quelques témoignages de cette recherche, de cette création intense de chiffres.

Nous en étions arrivés à une conclusion d'un niveau assez élevé puisque nous avions trouvé que de bons signes devaient être rapides, jolis et surtout différents.

Alors, chacun des dix élèves du CE_1 a fourni un chiffre et nous avons eu les " chiffres " de la classe. Les voici :



De là, plusieurs pistes se sont offertes.

Nous avons observé les chiffres arabes et conclu à leur excellence : ils sont rapides, jolis et différents à condition de bien les faire. Oui, l'humanité a bien fait de les adopter.

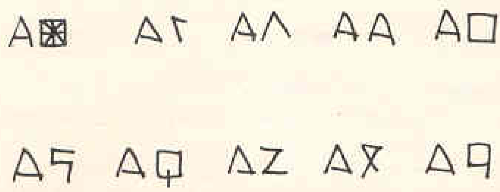
Patrice s'est écarté de la voie commune. Il a voulu faire du zèle : il a inventé vingt chiffres différents pour les 20 premiers nombres.

Mais la critique de la classe lui a permis de comprendre que, puisqu'il avait déjà inventé 1 - 2 - 3 etc, il n'avait pas besoin de signes spéciaux pour 11 - 12 - 13 etc.

De son côté Jean-François a inventé des signes pour les dix premiers nombres. La critique lui a permis de comprendre que pour 10 il ne devait pas inventer un nouveau signe puisqu'il avait déjà le *1*. Il suffisait d'inventer le zéro. Dans son 10 on devait retrouver son *1*.

C'était déjà aborder le principe de la numération.

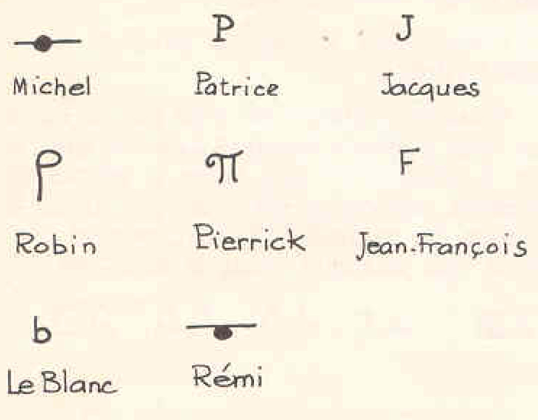
Plusieurs enfants se sont mis à écrire les cent premiers nombres avec les chiffres de la classe. Et cela nous a permis de prendre conscience du rôle que jouait le chiffre des dizaines, rôle parfaitement souligné, par exemple, dans la ligne des 30.



Cette construction " à côté " permettait de saisir sur quelle loi se fondait notre pratique quotidienne. Et c'était, par recoupement, une occasion de confirmer ce qui n'avait été que confusément aperçu l'année précédente. Avec cette différence que, cette fois-ci, les enfants raisonnaient sur leurs propres chiffres ; ce qui présentait évidemment plus d'attrait et permettait de poser un regard neuf sur d'anciennes choses.

Cette activité de symbolisation si excitante pour l'esprit me paraît très intéressante et même indispensable. Par tâtonnement expérimental, l'enfant peut comprendre cette activité car c'est en symbolisant qu'on devient symbolisateur. Si l'enfant est bien entraîné, il ne fera aucun complexe devant les symboles des autres. Cela m'apparaît capital, car ce sont souvent les symboles qui sont à l'origine des blocages en mathématiques : ils se présentent trop souvent à la queue-leu-leu et se bousculent sans attendre que les premiers aient été acceptés. Aussi, le service d'ordre se trouve-t-il rapidement débordé.

Il faut donc procéder à une démystification des symboles. Pour aider à cela, j'écris parfois, au tableau, la liste de mes élèves, de la façon suivante :



On vient de voir, par ce premier exemple de création de signes, que l'on peut tout accepter des enfants et que leurs inventions permettent presque toujours de découvrir des notions et des domaines intéressants.

Mais revenons au Cuisenaire et aux structures qu'il nous a permis de découvrir.

COMMUTATIVITE

Elle est très facile à vérifier avec les réglettes. Voici deux créations de Patrice :

$j + j + o + j + o = o + j + j + o + j.$

$j + R + b = R + b + j.$

La commutativité de la multiplication est également facile à vérifier par superposition : 3 réglettes de 4 : (3 R) recouvrent parfaitement 4 réglettes de 3 (4v).

On verra par la suite que $v \times R = R \times v$.

SYMETRIE

C'est une commutativité un peu stricte. C'est une structure très importante : elle entre dans la définition de la relation d'équivalence (réflexivité, *symétrie*, transitivité). Elle n'était même pas signalée à l'école primaire jusqu'à présent. Et pourtant elle est très accessible aux enfants qui s'en emparent très rapidement : surtout avec les réglettes qui permettent une découverte presque instantanée. L'accès rapide à la symétrie est souvent l'indice d'un tempérament mathématique. Chez nous, c'est Rémi qui a ouvert la piste.

v	R
R	v

$R + v = v + R$

r	b	r	b	r	b	r	b
b	r	b	r	b	r	b	r

$r + b + r + b + r + b + r + b =$
$b + r + b + r + b + r + b + r$

Il y a aussi les symétries des membres d'une égalité. Il faut alors deux égalités pour l'exprimer.

$o + m = B + r + n$

$B + r + n = o + m$

Naturellement, et on le verra souvent par la suite, les enfants réinvestissent toujours dans la vie les structures qu'ils ont créées abstraitement.

Ainsi un enfant nous dit : " *Hier, papa avait plus de crabe que maman dans son assiette. Alors, il en a donné à maman. Et cette fois-ci, c'était maman qui en avait plus que papa. J'ai dit :*

– *La 2ème fois, c'est symétrique de la première fois.*

NON COMMUTATIVITE DE LA SOUSTRACTION ET DE LA DIVISION

Par la suite on a découvert que 10 – 1 était différent de 1 – 10 et

$$\frac{10}{2} \text{ différent de } \frac{2}{10}$$

Cette non-commutativité de la soustraction et de la division ne laisse pas de surprendre les enfants.

La non-commutativité intervient aussi dans les relations d'ordre : on ne peut écrire indifféremment

$B > n$ et $n > B$

Si on veut inverser les lettres il faut aussi inverser le signe

$$B > n \longleftrightarrow n < B$$

ASSOCIATIVITE

Encore une structure importante. Elle rentre dans la définition du groupe commutatif (associativité - neutre - inverse - commutativité). Elle a des applications immédiates sur le plan du calcul, surtout lorsqu'elle se trouve associée à la commutativité.

Chez nous, elle a dérivé tout naturellement de l'égalité référence de Rémi.

$$r + b + r + b + r + b + r + b = b + r + b + r + b + r + b + r$$

En passant, je signale que cette création de Rémi avait été comme une révélation. Tous les enfants de la classe l'ont refaite : pour le plaisir de l'oeil semble-t-il (rouge-blanc, rouge-blanc...). Et lorsque tous les enfants reprennent la création d'un camarade, cela signifie qu'ils l'apprécient hautement.

Partout, on a retrouvé r + b (ou b + r). J'ai dit que c'était un couple, comme les couples de danseurs à la salle des fêtes.

On a formé des couples : 1 enfant CE_1, 1 enfant C.P. et l'on a dansé. Le bruit, les rires, la danse : rien de tel pour greffer une structure. C'est déjà hors Cuisenaire ; c'est un rappel de la vie. Et la joie pénètre, c'est-à-dire un sentiment qui fixera la notion.

Pour distinguer les couples les uns des autres, il faut les séparer les uns des autres.

Voici quelques inventions :

$r + b$ $\qquad$ $\boxed{r + b}$

$< r + b >$ $\qquad$ $(r + b)$

Pas à pas, j'ai conduit les enfants aux parenthèses plus économiques, plus pratiques et surtout, déjà éprouvées.

Aussi j'ai eu des inventions de la forme :

$$(r + b) + (r + b) + (r + b) + (r + b) = v + v + v + v.$$

TRANSITIVITE

Ce qui apparaît rapidement avec les réglettes c'est que si l'on a : $a = b$ et $b = c$ on peut en déduire $a = c$.

exemple : $V + R = o$

et $o = v + n$

donc $V + R = v + n$

CALCUL ARITHMETIQUE

Il est apparu tout de suite. En effet, très rapidement, les enfants ont débouché sur les nombres en passant par les unités : les petits blancs (b)

50 = 50 b   60 = 60 b   4 j = 20 b

Ils se sont intéressés au cardinal de la collection.

Et naturellement nous avons retrouvé avec les nombres ce que nous avions trouvé avec les réglettes.

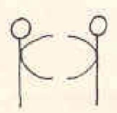
Entre temps, en gymnastique, j'avais noté la création suivante :

“ Deux enfants se donnaient les mains. Un troisième enfant disait “ A moi ” et il prenait la place de l'un des partenaires ”.

Naturellement, j'avais sauté sur une aussi merveilleuse occasion qui matérialisait et confirmait si bien ce que nous avions trouvé le matin. Et nous avions vu avec Pascal (P) Christian (C) et Rémi (R) que l'on avait d'abord le couple (P + C) puis R arrivait.

On passait alors de (P + C) + R à P + C + R quand P et C se lâchaient les mains, puis on avait P + R + C puis (P + R) + C quand P et R se donnaient la main. On était passé ainsi de (P + C) + R à (P + R) + C (Associativité).

Ce jeu constituait une excellente référence d'autant plus que petit-Robin déclara que les bras qui se donnaient pour isoler le couple, c'était les parenthèses.



Alors à partir de cet instant nous avons eu une vague de calcul qui a submergé tout pendant un moment. A ma grande satisfaction d'ailleurs, car cela allait dans le sens de la diminution de mes angoisses possibles, c'est-à-dire de mes soucis de calcul.

Ainsi, sans concession aucune, sans avoir jamais dirigé, en acceptant tout, nous arrivions tout de même dans un domaine “ recommandé ”. - On peut avoir confiance d'ailleurs, car les enfants aiment les nombres et ils y viennent spontanément.

Christian était le plus acharné : tandis que ses camarades voletaient de-ci, de-là, il couvrait ses pages de carnet de séries d'égalités impressionnantes.

En voici seulement quelques-unes :

5 + 5 + 4 + 2 = 16
8 + 2 + 4 + 1 = 15
1 + 16 + 8 = 25
18 + 16 + 20 + 10 = 64

Peu à peu, comme dans une cérémonie Vaudou, sa frénésie gagna l'assistance tout entière.

Au tableau, nous examinions les additions proposées et nous découvrions les couples intéressants. Et c'était Pierrick le roi, dans cette recherche. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il s'est révélé matheux.

(Pierrick se distingue surtout par le fait qu'il crée peu ; mais, il excelle dans la critique, pour mieux dire dans l'observation des faits, dans l'analyse).

Voici des exemples de ce que nous avions obtenu :

3 + 1 + 8 + 4 + 7 + 2 = 25

ou

2 + 3 + 4 + 10 + 1 + 2 + 5 = 27

2 + 3 + 5
10 +
4 + + 1
+ 2

Parfois ce sont des trios qui se révèlent intéressants

$4 + 2 + 6 + 4 + 3 + 1$

$(4 + 2 + \quad 4) + (6 + 3 + 1) = 20$

ou encore

$7 + 7 + 4 + 9 + 5$

$7 + (7 + 4 + 9) + 5$

$(7 + 5) + 20 = 32$

que l'on aurait pu traiter ainsi :

$7 + 7 + 9 + 9 = 2\,(7 + 9) = 32$

En face d'une addition proposée, on s'interrogeait pour savoir quelle était la solution la plus rentable, la plus économique, la plus élégante. Quelle gymnastique ! Quel plaisir !

Il y a eu ainsi un très grand tâtonnement pour le calcul arithmétique. Non seulement on a découvert l'associativité et la commutativité mais on est passé à la phase suivante du tâtonnement, c'est-à-dire à la répétition pour l'intégration. Ou, pour employer le langage sportif de mes enfants : on s'est entraîné. Et de ne s'être pas contenté de découvrir, mais d'avoir aussi intégré l'associativité et la commutativité voilà ce qui était vraiment nouveau.

OPÉRATIONS

J'ai commencé à parler d'opérations. Je vais continuer parce que je parle des réglettes Cuisenaire qui nous ont été si utiles dans ce domaine.

J'ai moi-même découvert beaucoup de choses. Un peu sur l'addition. Mais c'est surtout la soustraction qui m'a fait réfléchir.

Il faut que je raconte cette aventure.

Un jour, sur le cahier de recherches de Pierrick, j'ai trouvé : 2 o = 3 n

ce qui signifie :

2 réglettes de 10 = 3 réglettes de 7

Naturellement, la classe a protesté.

Et Pierrick a ri le premier de son erreur.

Avec les réglettes, nous avons bien vu que, pour avoir 3 noirs, il faut 2 oranges plus 1 b.

3 noirs = 2 o + 1 b (21 = 20 + 1)

Et on a vu aussi que si on mettait 2 oranges à côté de 3 noirs, il y avait une différence que l'on exprimait " en commençant par le plus grand " de la façon suivante :

3 n − 2 o = 1 b (21 − 20 = 1)

Nous les avons réécrites pour bien isoler les quantités

3 n = 2 o + 1 b
1 b = 3 n − 2 o

Il restait la 3ème quantité: 2 o

On avait, avec 2 o

2 o = 3 n − 1 b

Cela a été plus difficilement accepté.

– Ah ! non monsieur, ce n'est pas pareil !

Et pourtant quand Pierrick, qui avait compris, posait un blanc *sur* l'extrémité du troisième noir pour effacer le dernier centimètre carré, c'était bien égal.

Alors, on avait bien	Traduction
3 n = 2 o + 1 b	21 = 20 + 1
1 b = 3 n − 2 o	1 = 21 − 20
2 o = 3 n − 1 b	20 = 21 − 1

On pourrait me faire le reproche d'avoir pris ces 2 réglettes oranges et ces 3 noires pour faire cette démonstration. Avec une réglette de chaque couleur, c'eût tout de même été plus simple, plus net, plus facile.

Eh bien ! non, je n'ai pas fait de démonstration.

Et je n'ai pas choisi ces réglettes : je les ai seulement acceptées. C'est là-dessus que la découverte, la prise de conscience de l'existence de ces 3 égalités, s'est greffée. Je ne pouvais donc plus transposer, car c'était là notre référence unique. Si j'avais essayé d'introduire une deuxième référence plus conforme à mes désirs de netteté, j'aurais introduit la confusion. Une référence, ça doit être bien solide, bien enfoncé dans le sol : on doit pouvoir s'y appuyer, s'y raccrocher. Puisque c'est sur cet accident mathématique qui a fait événement que s'était greffé tout ce qui a contribué à le fixer dans le souvenir : l'erreur de Pierrick, la tête qu'il faisait, les rires, les protestations, le refus, la discussion et finalement l'acceptation – et aussi la simplicité de la construction de ces trois égalités par isolement successif de chacun des trois termes – je ne pouvais plus rien changer.

J'ai progressé en pédagogie quand j'ai compris que, pour la classe, la meilleure référence c'était non pas la jolie référence que mon esprit adulte aurait aimé offrir aux enfants, mais la première qui se présentait. Car c'est l'événement qui fixe, c'est l'accident qui surprend et intéresse. En l'occurrence, ici, je crois que l'un des éléments déterminants de la fixation a été la discussion qui a suivi le refus de la dernière égalité.

Mais revenons à nos trois égalités.

J'avais souvent remarqué sur des livres récents de maths

$$a - b = c \longleftrightarrow a = b + c$$

Mais je négligeais toujours de considérer la seconde partie parce que cela ne se faisait pas au temps de ma scolarité.

En réalité, il y a une troisième égalité.

$a - c = b$

On a la trilogie

$a = b + c \; ; \; b = a - c \; ; \; c = a - b$

Cela, vous le saviez depuis longtemps peut-être. Vous en aviez de la chance ! Moi, je le découvre seulement maintenant, à 45 ans. Quelle honte !

Et parce que je m'y suis arrêté un peu, je comprends maintenant l'erreur de certains de mes garçons.

Voici, par exemple, un problème de Patrice.

J'avais 150 c et je voulais acheter un masque de 200 c. Combien me manquait-il ?

Beaucoup d'enfants écrivent

$$150 \text{ c} + 50 \text{ c} = 200 \text{ c}$$

fournissant ainsi la réponse 200 c à la question : Combien me manquait-il ?

Pour nous c'est clair

$$150 + x = 200 \text{ donc } x = 200 - 150$$

Mais pour les enfants c'est plus difficile.

En effet

$$150 + 50 = 200 \text{ c'est juste.}$$

Alors, puisque c'est une égalité juste, pourquoi n'est-ce pas bon ?

Mais lorsque les enfants sont habitués à travailler sur les 3 formes :

$$\begin{aligned} 150 + 50 &= 200 \\ 200 - 150 &= 50 \\ 200 - 50 &= 150 \end{aligned}$$

ils peuvent choisir l'égalité qui isole la réponse à la question. Mais lorsqu'ils manient les x, cela devient encore plus clair

$$\begin{aligned} 150 + x &= 200 \\ 200 - x &= 150 \\ 200 - 150 &= x. \end{aligned}$$

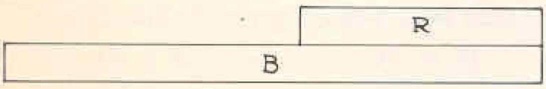
Quelques enfants ont travaillé sur cette triple relation de dépendance entre 3 nombres. Mais nous en sommes restés là, c'est-à-dire au stade de la découverte ; il n'y a pas eu vraiment répétition pour assimilation. C'est peut-être du domaine du CE_2. En tout cas, il semble que le tâtonnement sur cette triple relation soit à encourager.

Mais je n'en ai pas fini avec *ma* soustraction. En discutant avec mon fils Hervé, je l'ai encore un peu mieux comprise.

Partons de :

$B = j + R$

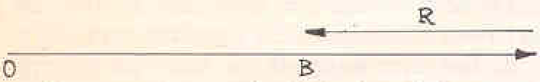
Si j'enlève jaune à l'égalité, on a :



D'un côté on avait B tout entier, de l'autre en posant R, on avait commencé à enlever R. Il ne restait plus à enlever pour égaliser que la différence j.

$B - R = j$

Par les vecteurs on comprend mieux :



Pour avoir une égalité, c'est-à-dire pour retourner au point zéro, puisqu'on a déjà commencé à enlever R, il faut encore enlever j pour avoir $B = R + j$. Cela donne :

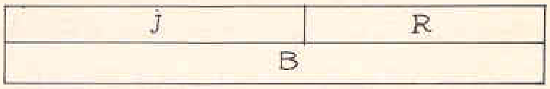
$B - R - j = 0$

d'où

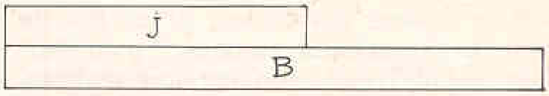
$B - R = j$

Cela s'appelle calculer le reste, sous-entendre le reste à enlever pour avoir l'égalité au point zéro.

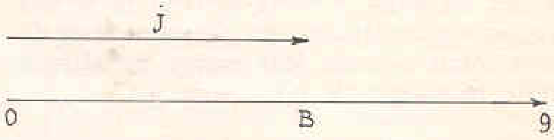
Mais si dans l'égalité $B = j + R$



j'enlève R



cette fois-ci, on n'est plus tenté d'égaler au point zéro mais au point 9.



Cette fois-ci pour égaliser on ne revient pas en arrière, on va de l'avant. Et c'est un + qui apparaît.

$j + . = B \longrightarrow j + R = B$

d'où $R = B - j$

Cette fois-ci, il ne s'agit plus de calculer un reste, mais un manque : c'est une chose différente.

Hervé me dit que j'ergote, que lorsqu'on a une somme de deux termes on convient que, connaissant la somme et l'un des termes, pour retrouver l'autre on fera une opération que l'on appelle soustraction et que l'on dote du signe –. Les deux opérations $j = B - R$ et $R = B - j$ sont identiques.

Il a peut-être raison mathématiquement et moi, je sens bien que mon raisonnement mathématique n'est pas très solide ; mais psychologiquement, j'ai raison.

Car cela fait difficulté dans nos classes : calculer un reste ou un manque, ce n'est pas du tout la même chose. Et il faut aborder la question franchement, peut-être par les vecteurs qui plaisent tant aux enfants.

Dans le second cas les enfants devraient pendant un certain temps pouvoir écrire :

$$j + x = B$$

d'où $$x = B - j$$

Peu à peu, par entraînement et recherche de l'économie les enfants arriveraient à écrire directement $x = B - j$

Mais, à mon avis, il est bon de leur faire voir le dessous des choses. Et au lieu de formuler l'incantation magique " pour chercher une différence, on fait une soustraction ", ils traduiraient d'abord la réalité par une équation qu'ils travailleraient à leur guise.

En réalité, on pourrait chercher aussi à égaler au point 5 entre le 0 et le 9. Les vecteurs complémentaires changent alors de sens. Mais comme leur valeur numérique reste inchangée, je n'en parle pas.

MULTIPLICATION

Abordons maintenant une question de pédagogie épineuse que je n'ai pas non plus entièrement résolue et que je vous soumets pour que vous m'éclairiez.

A mon avis 4 × 7 peut se lire de deux façons 4 fois 7 ou 4 multiplié par 7. Dans le premier cas c'est le multiplicateur qui apparaît en premier, dans le second cas c'est le multiplicande.

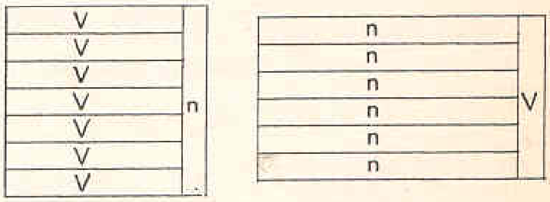
Or l'habitude actuelle c'est d'écrire pour 4 tas de 7 choux chacun 7 × 4.

Pour les enfants, il y a une difficulté d'ordre psychologique. En effet, ils traduisent l'opération × par le mot " fois ". Et c'est bien commode de dire 4 fois 7 choux. Et ce serait bien commode de pouvoir écrire aussi 4 × 7 de gauche à droite comme on écrit les mots. A mon avis, on devrait permettre cette écriture aux enfants. Mais conjointement, il faudrait associer à cela la notion d'opérateur qui s'exprime par 7 × 4.

Et pour bien faire, il faudrait arriver là aussi à une telle habitude des deux formes que les enfants pourraient employer indifféremment l'une pour l'autre.

Moi, j'ai voulu introduire dans ma classe la notion d'opérateur que je crois avoir saisie dans un livre de maths. Aux camarades mieux informés de me dire si je me trompe.

Un jour, Jacques du C.P., avait bâti ceci qui est remarquable.



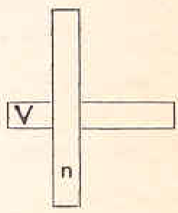
V X n n X V

Cela se lit V opéré par n et n opéré par V.

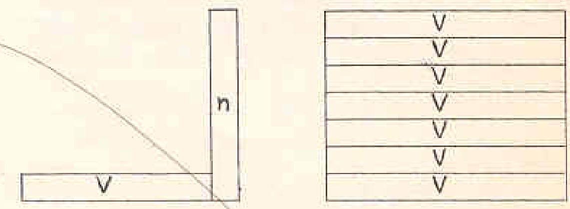
(6 × 7) (7 × 6)

Dans le premier cas (6 × 7) on pose d'abord le 6, c'est la matière première sur laquelle on va opérer une transformation, cette transformation étant (× 7).

Cette notion d'opérateur m'a semblé importante et utile. Aussi j'ai fait un effort intellectuel considérable. Jugez-en. En effet, voici comment j'ai présenté la chose.



Le noir donne un coup sur la tête du vert pour l'endormir. Et pendant qu'il dort, il lui fait une farce. Il lui met des copains dans sa chambre, puis il se sauve.



Cette façon de présenter les choses vous paraîtra peu sérieuse et peu digne d'un éducateur conscient de ses responsabilités et de la gravité de sa mission.

Et si, psychologiquement, c'était juste ?

Et ça m'en a tout l'air parce qu'on a bien ri, pour ne pas dire rigolé. Et on s'en est souvenu. Les enfants n'ont-ils pas tous les jours, sous les yeux, des westerns, dont ils se délivrent en simulant, à merveille, l'évanouissement qui suit les coups sur la tête. Et ne vaut-il pas mieux qu'ils se hâtent d'en rire.

En superposant les 7 réglettes vertes et les 6 réglettes noires nous avons vu que

$$6 \times 7 = 7 \times 6.$$

Jusqu'à présent, il y avait une seule façon sacro-sainte d'exprimer, par exemple le prix de 178 objets à 6 c l'un. C'était

6 c × 178.

Mais pour faire l'opération on posait :

$$\begin{array}{r} 178 \\ \times \quad 6 \end{array}$$

C'était reconnaître la commutativité de la multiplication. Pourquoi ne pas la reconnaître dans le texte. 178 fois 6 (178 × 6) ou 6 opéré par 178 (6 × 178), n'est-ce pas la même chose ? De toute façon, y a-t-il là de quoi lever les bras au ciel et s'arracher les cheveux qui nous restent ? Ne vaudrait-il pas mieux réserver nos agacements et nos trépignements pour des choses qui en valent la peine ? Cependant poser d'abord le nombre à opérer, puis l'opérateur qui transforme, cela semble logique.

(C'est aussi le calendrier (février) qui nous a permis de voir que 4 × 7 et 7 × 4 sont deux aspects complémentaires d'une même réalité).

DIVISION

De même que pour a, b, c,
on a avec l'opération +

$a = b + c \qquad b = a - c \qquad c = a - b$

pour la division, on a avec D, d et q :

$$D = dq \qquad d = \frac{D}{q} \qquad q = \frac{D}{d}$$

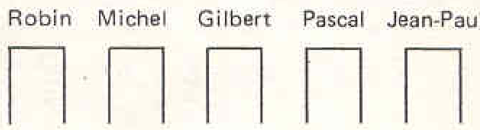
Là aussi, il s'agit de deux divisions distinctes suivant que l'on calcule le multiplicateur ou le multiplicande du produit dq.

On calcule le " nombre de parts " ou la " valeur d'une part ".

Je me suis aperçu que les deux choses étaient intimement liées.

En effet, pendant les vacances de Noël, à l'occasion d'un anti-poussiérage, les cantonniers nous avaient préparé un joli spectacle : ils avaient renversé nos boîtes et fourré toutes les réglettes en vrac dans une caisse. Il a fallu reconstituer les 5 boîtes, c'est-à-dire partager les réglettes de diverses couleurs entre 5 boîtes.

Voici comment nous opérons :



Nous donnons d'abord 1 à chacun, puis un autre etc... Ce qui pour 15 par exemple donne ceci :

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Et l'on voit que 5 × 3 et 3 × 5 c'est la même chose. Cela, on le sait, mais ce qui est apparu, c'est que les enfants disaient : il faut 5 pour faire un premier tour de distribution, il faut encore 5 pour faire un second tour et encore 5 pour un troisième tour.

Trois tours en tout, donc : trois à chacun.

Ce qu'il y a en moi de pédagogue se réjouissait car, si les enfants connaissent la division " partagé entre " dont ils ont une très grande expérience, parce qu'elle se retrouve constamment dans la vie, la division " combien de fois " est plus délicate. Et c'est justement à l'occasion d'un " partage entre 5 " que les enfants introduisent le " combien de fois 5 " à l'occasion des tours de distribution.

Avec 15, il faut 5 pour faire un tour :

dans 15, combien de fois 5 ?

3 fois, donc 3 à chacun.

On peut remercier les cantonniers de nous avoir offert une aussi riche référence.

Je crois que, là aussi, il est excellent de favoriser un tâtonnement riche pour l'assimilation des deux formes de la division. Et même, comme pour l'addition et la soustraction on a intérêt à faire apparaître les 3 relations d'interdépendance entre les 3 nombres.

$$p = a \times b \qquad a = \frac{p}{b} \qquad b = \frac{p}{a}$$

Sinon les enfants répondent mal à la question que leur pose Michel.

Combien j'ai eu de carambars à 5 c avec les 30 c de mon parrain ?

Ils écrivent : $5 \times 6 = 30$

parce qu'ils pensent intuitivement :

$$5 \times x = 30$$

donc x c'est 6 donc : réponse :

$$5 \times 6 = 30 \text{ ce qui est faux.}$$

Comme pour

$150 + x = 200 \longrightarrow x = 200 - 150$

il faudrait que les enfants s'habituent aux trois formes :

$$5 \times 6 = 30 \qquad 5 = \frac{30}{6} \qquad 6 = \frac{30}{5}$$

qu'ils passent facilement de l'une à l'autre et qu'ils sachent isoler la bonne réponse.

Sinon puisque $5 \times 6 = 30$ c'est juste, ils ne comprendront pas pourquoi leur réponse est fausse.

Mais cela ne pourra être saisi qu'après un abondant tâtonnement expérimental qui est peut-être du domaine du CE_2 ou du CM.

RELATION ENTRE SOUSTRACTION ET DIVISION

Puisque nous sommes pédagogiquement en train de prendre conscience de ce qui se cache dans les opérations, essayons de voir, puisque l'addition est dans la multiplication, si la soustraction ne serait pas, par hasard, dans la division.

Mais si, mais si : Soit le problème de Robin :

J'ai 16 voitures pour Gérard et moi.

Combien pour chacun ?

J'obtiens souvent la réponse suivante :

$16 - 8 = 8$ (Et vous ?)

Comme le $150 + 50 = 200$, cette erreur est riche d'enseignements. Car, en fait, quand on fait une division, on fait des soustractions.

J'ai 30 c. Si j'achète un carambar, il me reste 30 c − 5 c = 25 c. Si j'en achète un autre, il me reste $25 - 5 = 20$ etc.

Et l'on voit ainsi que l'opération a été :

$30 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 = 0$

ou $30 - (6 \times 5) = 0$

d'où $30 = 6 \times 5$

$$\frac{30}{5} = 6$$

Bien sûr, il ne faut pas enseigner tout cela aux enfants. Mais si on axe son enseignement sur l'invention, la création, la découverte enfantine, il faut s'attendre à des difficultés. Ou plus simplement, il faut avoir un peu réfléchi ; il faut être averti de ce qui pourrait arriver. Il faut par exemple, s'attendre à voir déboucher la division par une voie que l'on n'avait pas prévue. Il faut savoir la reconnaître pour ne pas risquer de lui interdire stupidement l'entrée du village. Heureusement, les réglettes Cuisenaire permettent au maître de comprendre rapidement beaucoup de choses.

Dans notre classe nous avons, pour la division, une bonne référence : c'est, encore une fois, le calendrier.

Par exemple, dans notre mois de janvier qui est punaisé en permanence sur le contreplaqué,

il y a $28 + 3 = 31$

donc, aussi, $31 - 3 = 28$ et $31 - 28 = 3$.

Mais 28 c'est 4×7 ou 7×4

donc $\frac{28}{4} = 7$; $\frac{28}{7} = 4$

Et si on réintroduit l'addition $28 + 3 = 31$

On a $31 = (4 \times 7) + 3$

donc aussi,

$31 - (4 \times 7) = 3$ et $31 - 3 = 4 \times 7$

Et l'on retrouve $D = dq + r$

$D - r = dq$

Mais, direz-vous, pourquoi toutes ces réflexions personnelles alors qu'on nous avait promis des commentaires sur les leçons " a posteriori " à partir de créations d'enfants ?

Attendez, il faut que je travaille aussi pour moi et que je m'explique des choses. C'est qu'en effet, j'ai souvent des créations du type :

$5 + 5 + 5 + 5 + 4 = 24$

$7 + 7 + 7 + 7 + 3 = 31$

Je dis alors à mes enfants :

– Vous faites des divisions. On pourrait les écrire autrement, mais vous avez le droit de les écrire comme cela.

Et ils tâtonnent longuement sous cette forme aussi licite que les autres et qui n'est qu'une dérivation un peu spéciale du tâtonnement de Christian sur l'addition.

Il y a aussi cette forme intéressante

$31 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3$

Et c'est de l'excellent calcul mental et une excellente préparation à la pratique de la division. Et, aussi, en passant, un apprentissage sans douleur de la table de multiplication que l'on n'apprend d'ailleurs jamais par coeur mais que l'on sait, par tâtonnement expérimental en inventant sans cesse et sans cesse dans un milieu où les accidents et l'affectivité organisent des références constantes.

Naturellement, on aura un jour :

$7 + 7 + 7 + 7 + 8 = 36$.

Et l'on découvrira aisément qu'on peut dire :

$(7 + 7 + 7 + 7) + 7 + 1$

ou $(4 \times 7) + (1 \times 7) + 1$

Et comme évidemment on connaît la mise en facteur commun on a :

$7 (4 + 1) + 1 = 36$

$(7 \times 5) + 1 = 36$

Ce n'est pas de la division cela ? Si ; et même de l'excellente !

Pourquoi toujours $\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$

et jamais

$D = dq + r$; ou $D - dq = r$.

Non, non, dans la voie où je suis, il faut savoir tout permettre et savoir tout accepter. Il ne faut pas mettre de limite au tâtonnement. Il est toujours utile, efficace, productif. Et, comme le texte libre, les techniques parlées, le dessin libre, il n'est jamais gratuit. Ici, n'avons-nous pas affaire à la conquête, dans l'élan, de la maîtrise des opérations et à la préparation de la théorie de ces opérations ?

Cette année, à part les fractions et la recherche d'entiers avec les réglettes en début d'année, nous n'avons pour ainsi dire pas fait de division au sens habituel du mot. Mais nous en avons fait en quantité sous une forme non classique.

A mon avis, la division classique ne devrait être abordée qu'au CM_2. Elle serait alors facilement assimilée parce qu'elle viendrait en son temps et qu'elle ne serait que la systématisation, la mise en ordre d'un acquis. Je pense qu'à ce moment, il y aurait belle lurette que les enfants l'auraient absorbée. Mais si je demande le CM_2, c'est pour qu'on recule loin dans le temps les exigences du programme et pour qu'on apporte aux maîtres la paix si nécessaire au dépassement des plans avant la date prévue.

Et si, par hasard, dans tel ou tel domaine la recherche libre n'avait pas donné le résultat espéré, il serait alors possible de conduire, par le moyen de boîtes enseignantes, les enfants au résultat exigé. Je dis cela pour toutes choses. On peut rêver d'un programme. A un moment précis, certaines bases doivent être assurées si l'on ne veut pas compromettre tout le développement ultérieur. A 10 ans, par exemple, il n'est pas permis qu'un enfant ne sache pas nager, conduire un ballon, rouler à vélo, parler en public, écrire, lire, dessiner.

A 10 ans, il n'est pas tellement besoin qu'un enfant sache calculer, car dans ce domaine, il pourra toujours s'entraîner valablement. Mais à 10 ans, l'enfant devra avoir intégré de nombreuses structures mathématiques, sinon son développement ultérieur sera définitivement compromis.

Qu'en pensez-vous ?

A mon avis, et pour certains points précis, si la simple activité créatrice n'aura pas permis, à tel moment donné, de doter l'enfant de tel ou tel outil indispensable, il faudra tout de même passer à la répétition pour l'assimilation, au besoin en recourant aux boîtes.

Mais, vous le sentez déjà : quel est, ou quel sera le programme, c'est-à-dire l'échelonnement des connaissances à acquérir dans le temps ? Voilà la question !

Cependant, je ris dans ma moustache, en pensant aux exigences limitées des programmateurs actuels. Car je pressens qu'un tâtonnement aussi généreux que celui que je propose donnera des résultats rapides et étonnants. Comme l'on doit avancer quand on n'est pas empêché de travailler !

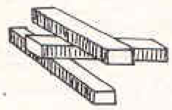
Mais je ne dis mes espoirs secrets à personne, car " ils " pourraient augmenter les normes, et supprimer ainsi le boni.

PUISSANCES ET RACINES

PUISSANCES

Les enfants opérant 7 par 4 (noir par rose) 6 par 8 etc... en arrivent naturellement à opérer 4 par 4 (rose par rose) 5 par 5 etc... et même 4 par 4 par 4 c'est-à-dire $4 \times 4 \times 4$ que l'on écrit 4^3.

Pour cela on met les réglettes en croix.



Et on peut monter ainsi des tours de plusieurs étages ; de 10 étages, par exemple avec le 2, ce qui fait 2^{10}.

2^{10} est facile à calculer parce qu'on le trouve dans la vie (Quitte ou double à la radio) et que c'est une comptine familière :

2 et 2 = 4, 4 et 4 = 8, 8 et 8 = 16 etc.

$$2^{10} = 1\ 024.$$

Avec les puissances de 10, c'est facile également puisque 10^2 c'est 100, 10^3 c'est 1000, 10^6 c'est un million, 10^9 un milliard. (Ce million, ce milliard qui plaisent tant aux enfants).

Pour les puissances de 10 ils ne seront pas longs à trouver le truc. Il suffit d'écrire autant de zéros que l'exposant en indique.

$10^6 = 1\ 000\ 000 \qquad 10^5 = 100\ 000$

$10^4 = 10\ 000 \qquad 10^3 = 1\ 000$

$10^2 = 100 \qquad 10^1 = 10 \quad 10^0 = 1$

Ces derniers résultats $10^1 = 10$ et $10^0 = 1$ obtenus par un savant " decrescendo " sont très importants. Nous aurons l'occasion de les retrouver dans les numérations non-décimales et à l'occasion de l'étude de la numération de position.

Les enfants ont joué avec beaucoup de plaisir à ce nouveau jeu des puissances. C'était agréable parce qu'il y avait le support des réglettes et les tours d'une seule couleur que l'on pouvait monter avec les mains.

On pourrait peut-être se passer des réglettes pour parler des puissances ne serait-ce qu'avec les billets et les pièces de monnaie, ou avec le système décimal. Mais, il faut reconnaître que les réglettes permettent une bonne implantation des racines et des puissances.

Mais Pierrick, lui, se passait de réglettes. Et si Rémi a été le spécialiste de la symétrie, Christian le spécialiste du calcul numérique, Pierrick de l'associativité, Michel de la table de 9, Pierrick s'est remontré à l'occasion des puissances. Ce qui montre avec ce dernier garçon que chaque enfant pourrait se constituer une personnalité mathématique originale en triant dans le monde des maths, les éléments qui lui conviennent plus spécifiquement. Et à partir de ces éléments bien adaptés, bien assimilés, il pourrait construire un savoir solide et bien à lui, qu'il n'aurait qu'à laisser fructifier dans un climat favorable.

Voici les puissances qui au CE_1 sont revenues le plus souvent :

$2^1 \ 2^2 \ 2^3 \ 2^4 \ 2^5 \ 2^6 \ 2^7 \ 2^8 \ 2^9 \ 2^{10}$

$3^1 \ 3^2 \ 3^3 \ 3^4$

$4^1 \ 4^2 \ 4^3$

$5^1 \ 5^2 \ 5^3 \qquad 6^2 \ 7^2 \ 8^2 \ 9^2$

$10^1 \ 10^2 \ 10^3 \ 10^4 \ 10^5 \ 10^6 \ 10^7 \ 10^8 \ 10^9$

Bien sûr, et je tiens à le souligner parce que cela a été une caractéristique de notre expérience de mathématique libre, les puissances n'ont duré qu'un temps. Et il en a été ainsi pour toute chose.

Parfois la classe s'intéressait à une seule chose. Et il semblait qu'elle n'en sortirait jamais plus. J'acceptais, parce que je voulais vraiment jouer le jeu. Mais soudain, l'un des élèves s'embarquait sur une autre voie. Je le signalais à la classe parce que c'était cela mon rôle.

Mais quand elle n'avait pas suffisamment fait le tour de ce qu'elle venait de découvrir, elle ignorait la nouvelle piste. Cependant, parfois, quand elle en avait assez de tourner en rond sur un même sujet, elle profitait de la découverte d'une nouvelle piste pour prendre la tangente.

Mais certains enfants s'écartaient momentanément du groupe pour reprendre des créations laissées en plan, soit parce que, à ce moment, il y avait eu pléthore de découvertes et on n'avait pas eu le temps de les bien contempler ; soit, pour reprendre un thème de recherche et en pousser un peu plus avant le développement ; soit, enfin, parce qu'en prolongeant un thème, on pouvait déboucher, par une simple dérivation, sur quelque chose de neuf et de très intéressant.

Mais, direz-vous, laisser ainsi les enfants au gré de leur inspiration, est-ce que ce n'est pas leur faire courir les risques d'un papillonnement stérile ? Soyez tranquille – et cela a été pour moi la découverte essentielle – il y a toujours des reprises, des recoupements, des ordres successifs qui donnent de tous sujets une connaissance profonde.

RACINES

Cela pourrait étonner. Mais c'est l'opération inverse des puissances.

Puissance, selon Cuisenaire, c'est le nombre d'étages de la tour d'une couleur donnée.

Racine, c'est la couleur de la tour.

Quand on connaît la valeur numérique totale et l'exposant (la hauteur de la tour), on peut trouver la couleur

$$\sqrt[3]{27}$$

C'est une tour de trois étages dont on connaît la hauteur mais dont on ne connaît pas la couleur (verte c'est-à-dire : 3).

Je dois signaler que nous avons moins exploré les racines que les puissances. Il ne s'agit pas au CE_1 d'apprendre, de posséder ces notions, mais simplement de les avoir abordées une fois au moins, c'est-à-dire d'avoir fixé un crochet dans l'esprit. De cette façon toutes les puissances et racines à venir dans la vie sauront où s'accrocher parce qu'il y aura une place pour elles.

Elles sauront se suspendre toutes seules au crochet installé. Elles iront d'elles-mêmes se mettre en place sans que celui qui est chargé de la répartition des connaissances ait à se fatiguer.

Il me semble que pour la saisie des racines, le tâtonnement aurait été plus long que pour les puissances. Mais nous ne sommes pas allés au bout du tâtonnement. Nous n'avons fait que passer devant au début décembre à cause du Cuisenaire. Mais, au milieu de février, nous avons retrouvé puissances et racines quand nous avons eu affaire aux aires de carrés (petit rectangle de Serge de Buzet).

Et cette fois-ci, ce n'était pas artificiel, ça venait de la vie et seulement de la vie et des créations des enfants qui s'étaient mis à quadriller leurs carnets de recherches de maths.

On pourrait poser comme principe de toujours partir de la vie et seulement de la vie. Mais attendre que la vie offre concrètement toutes les possibilités, c'est poser le principe que rien ne peut se faire qu'à partir du concret.

Mais je pense, avec Bachelard, que ce n'est pas un bon principe. Pour être créatrice, la pensée doit être libre de jouer comme elle veut. Puis, elle investit ses découvertes dans le réel, ce qui la confirme dans la bonne opinion justifiée qu'elle a d'elle-même.

Alors, après avoir joué artificiellement avec 10^0, 10^1, 10^2 etc... elle est heureuse de découvrir, dans la vie, le système décimal.

10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
		1	9	6	7

Je n'insiste pas plus sur les apports du Cuisenaire. On pourra avoir d'autres renseignements dans les livres de Gattegno et

Madeleine Goutard. Cependant je dois signaler que si, à mon avis, Madeleine Goutard a posé d'excellents principes dans son premier livre, elle les oublie un peu trop dans le second. A mon avis, il ne faut pas demander au Cuisenaire plus qu'il ne peut donner. Il ne faut surtout pas s'enfermer dans le Cuisenaire. Ce serait faire, d'un bon outil de passage, une limitation.

Je me permets de vous renvoyer à ce propos aux articles parus l'an dernier dans l'Educateur (n° 12-13 - 15 mars-1er avril 1966, p. 2).

Cependant, avant d'en terminer, je voudrais revenir sur un autre point intéressant du Cuisenaire.

Nous avons pu remplacer 5 réglettes rouges par une réglette orange ($5 \times 2 = 10$). Mais on pouvait faire aussi l'opération inverse : Etant donné orange, combien peut-on mettre de rouges dessus (10 : 2).

On écrit pour cela :

10 mesuré par 2 =

Ce qui correspond bien à la notion de mesure. Mesurer, n'est-ce pas regarder " combien de fois " l'unité est contenue dans la longueur à mesurer.

Pour " mesuré par " les enfants m'ont fourni 3 signes : — . Nous les avons gardés tous les trois.

Cette expression de " mesuré par " est très pratique. Elle nous permet en particulier de comprendre que

$$\frac{8}{0} \text{ est impossible}$$

parce qu'il n'y a pas de mesure 0.

D'autre part, lorsque l'on veut mesurer une petite réglette par une réglette plus grande on est obligé de prendre pour unité de mesure un morceau (une fraction) de la grande réglette.

Là aussi le Cuisenaire est un excellent support visuel.

Donc, vous le voyez, c'est un outil intéressant. Mais les enfants l'ont vite abandonné (au bout d'un mois) parce qu'ils voulaient voler plus haut.

Cependant, de temps en temps, pour se détendre ou se rassurer, ils revenaient se poser sur ce solide rocher. Nous le constaterons en chemin.

Maintenant, je reprends mon journal de bord pour poursuivre la relation de notre voyage dans les antichambres des espaces mathématiques.

J'ai parlé, au début, des recherches sur l'associativité et la commutativité.

Voici, à ce sujet, un travail de Patrice.

$$8 + (4 + 1) + 2 = 15$$
$$9 + (1 + 2) + 3 = 15$$
$$10 + (0 + 4) + 1 = 15$$
$$11 + (1 + 2) + 1 = 15$$
$$12 + (1 + 1) + 1 = 15$$

C'est un tableau très intéressant que l'on pourrait peut-être appeler tableau d'équivalence. En réalité, non, c'est une suite d'égalités. Et elle serait banale si le nombre 15 ne revenait pas à chaque fois. C'est donc une suite qui a une unité. Et c'est ce bien commun à toutes les égalités qui permet de donner à la suite, qui aurait pu être quelconque, le nom spécial de tableau.

Quand il avait été créé, je n'avais pas pensé à en tirer parti. J'avais songé seulement à l'associativité.

Mais Jacques, lui, a dû flairer là-dedans quelque chose d'intéressant.

En effet, alors que tout le monde travaillait sur les additions, il est brusquement parti sur une nouvelle piste. J'ai eu la chance de m'en apercevoir car c'est cela qui a provoqué, en moi, une attitude nouvelle qui a suscité la suite de mon expérience. A partir de ce jour, je me suis mis à l'affût. Et bien m'en a pris.

Voici la création de Jacques (le 15-10) :

$$19 + 3 = 22$$
$$17 + 5 = 22$$
$$15 + 7 = 22$$

Pourquoi a-t-il choisi le nombre 22 ? Je ne sais. Peut-être à cause du nombre d'élèves de la classe (22). Ou à cause de " 22, voilà les Côtes-du-Nord ".

Un garçon a dit :

– *On aurait pu continuer*

– *Alors, continuons.*

Mais comme nous terminions par 1 + 21 nous avons placé 21 + 1 en haut de la colonne pour la symétrie. En effet, en analysant la création de Jacques, nous avons vu la symétrie par rapport à 11 + 11 (symétrie obtenue par commutativité).

$$21 + 1 = 22$$
$$19 + 3 = 22$$
$$17 + 5 = 22$$
$$15 + 7 = 22$$
$$13 + 9 = 22$$
$$11 + 11 = 22$$
$$9 + 13 = 22$$
$$7 + 15 = 22$$
$$5 + 17 = 22$$
$$3 + 19 = 22$$
$$1 + 21 = 22$$

Ce même jour, Jacques a voulu faire un tableau d'équivalence des différences. Mais il s'est trompé. On le lui a fait voir.

$$24 - 2 = 22$$
$$30 - 8 = 22$$
$$* \; 33 - 10 = 22$$
$$* \; 32 - 9 = 22$$

Le lendemain, il essaie à nouveau un tableau d'addition.

Je m'arrête un peu à cela pour signaler l'attitude de l'enfant qui cherche. Fort de son premier succès, il avait voulu attaquer large et aborder également la soustraction. Mais comme il échoue il va attaquer profond : il revient à l'addition qui lui avait si bien réussi la première fois et il va percer.

Il avait fait une brèche et il pouvait croire que c'était la brèche des quatre opérations. Mais ce n'était que la brèche de l'addition. Ce n'est que dans l'addition qu'il peut effectuer son deuxième pas. Voici ce second tableau :

$$18 + 4 = 22$$
$$16 + 6 = 22$$
$$14 + 8 = 22$$
$$12 + \cancel{12} = 22$$
$$10 + \cancel{13} = 22$$
$$8 + \cancel{15} = 22$$

Cette fois, le tableau est bien ordonné, en ce qui concerne la première colonne tout au moins. Mais pour la deuxième colonne il y a eu un dérapage. Le groupe a aidé Jacques à prendre conscience de son erreur, et il a repris et prolongé sa création de la façon suivante :

$$\begin{array}{r}
22 + 0 = 22 \\
20 + 2 = 22 \\
18 + 4 = 22 \\
16 + 6 = 22 \\
14 + 8 = 22 \\
12 + 10 = 22 \\
10 + 12 = 22 \\
8 + 14 = 22 \\
6 + 16 = 22 \\
4 + 18 = 22 \\
2 + 20 = 22 \\
0 + 22 = 22
\end{array}$$

Nous l'avons analysée et nous avons vu que les nombres se retrouvaient deux fois : une fois dans la première colonne, une fois dans la deuxième colonne. C'était une confirmation de la commutativité et de la symétrie découvertes avec les réglettes Cuisenaire.

Mais ce second tableau comparé au premier nous a permis de constater qu'il y avait une différence entre les deux. Dans le premier tableau, il y a un *1* au commencement. Dans le second il y a un *0*.

$$\begin{array}{lcl}
21 + \mathit{1} = 22 & \qquad & 22 + \mathit{0} = 22 \\
19 + 3 = 22 & & 20 + 2 = 22 \\
17 + 5 = 22 & & 18 + 4 = 22 \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

C'est une première intuition de la parité.

Certes, on aurait pu encore découvrir autre chose. Mais à chaque jour suffit sa peine. Pour aujourd'hui, c'est déjà beau. La vie est longue. Il n'est pas nécessaire de tout avaler du premier coup.

D'ailleurs, dès le lendemain, nous sommes allés un peu plus loin puisqu'un enfant a dit :

- *Au lieu de sauter 2, on pourrait sauter rien que 1.*

$$\begin{array}{r}
22 + 0 = 22 \\
21 + 1 = 22 \\
20 + 2 = 22 \\
19 + 3 = 22
\end{array}$$

Tiens, ce n'est pas pareil qu'hier. Alors nous sommes revenus à hier et nous avons comparé les trois tableaux.

$$\begin{array}{r|ll}
22 + 0 = 22 & 22 + 0 = 22 & \\
21 + 1 = 22 & & 21 + 1 = 22 \\
20 + 2 = 22 & 20 + 2 = 22 & \\
19 + 3 = 22 & & 19 + 3 = 22 \\
18 + 4 = 22 & 18 + 4 = 22 & \\
17 + 5 = 22 & & 17 + 5 = 22 \\
16 + 6 = 22 & 16 + 6 = 22 &
\end{array}$$

Le tableau de gauche contient les deux autres et la parfaite alternance entre les deux tableaux de droite a surpris et ravi.

Elle correspondait à un certain désir de perfection qui réside en chaque enfant.

A noter que dans l'établissement des tableaux, les enfants ne font pas le calcul de la somme mais, par exemple, pour ⟶

$$\begin{array}{rcl}
22 & + & 0 \\
20 & + & 2 \\
. & & . \\
. & & . \\
. & & . \\
. & & . \\
. & & .
\end{array}$$

ils juxtaposent deux progressions arithmétiques de raisons opposées (+ 2 et − 2). Ce qui démontre qu'ils ont saisi la structure du tableau. Lorsque les enfants trouvent un " truc " pour s'économiser des calculs, c'est un signe d'intelligence mathématique car, c'est cela, les mathématiques : trouver des trucs qui permettent d'aller plus vite avec moins d'effort.

Il y a aussi, dans ces tableaux, une idée intéressante de compensation, ou si l'on préfère, de la constance de la somme des complémentaires.

Ce travail sur les progressions est inconscient : on n'en est encore qu'à l'intuition vague. La conscience viendra quand on abordera, par exemple, les multiples et les classes d'équivalence où le module devient la raison.

Mais, grâce à Rémi, l'idée se précise tout de même assez rapidement.

Voici son tableau :

$$\begin{array}{r}
32 - 2 = 30 \\
30 - 2 = 28 \\
28 - 2 = 26 \\
26 - 2 = 24 \\
24 - 2 = 22
\end{array}$$

– Oh ! j'ai compris son truc : il enlève 2 à ce qu'il a trouvé. Toujours comme ça.

Le lendemain, Rémi continue sur sa lancée. Mais il étend sa découverte à l'addition et à la soustraction de 3.

$0 + 2 = 2$	$32 - 3 = 29$
$2 + 2 = 4$	$29 - 3 = 26$
$4 + 2 = 6$	$26 - 3 = 23$
$6 + 2 = 8$	$23 - 3 = 20$

Ce sont bien des progressions arithmétiques. Autrefois, quand nous étions écoliers, on nous faisait faire de telles progressions " compter et décompter, par 2, par 3 etc.". Et c'était bien de " faire ". Mais " découvrir" c'est infiniment mieux. Ici, c'est l'enfant qui se donne son travail : cela fait toute la différence. Et, attention, ce n'est pas pour un entraînement utilitaire au calcul mais pour une exploration des nombres et de leurs mystères. N'est-ce pas différent également ?

TABLEAUX ORDONNES

Certains enfants veulent suivre la piste de Rémi et de Jacques. Mais ils ne se rendent pas compte que leurs tableaux ne sont pas ordonnés.

Exemple :

$$20 + 1 = 21$$
$$13 + 1 = 14$$
$$17 + 1 = 18$$
$$12 + 1 = 13$$

Il faut la critique de la classe pour qu'ils en prennent conscience.

Cette notion d'ordre est très importante. Dans l'enseignement habituel, on y fait peu appel. Pourtant, c'est une notion que les enfants découvrent spontanément. Et il suffit de souligner l'ordre existant ou inexistant pour que la structure se fixe. Et cette structure, c'est un outil supplémentaire pour l'investigation du réel.

Evidemment, les enfants sont libres d'ordonner ou de ne pas ordonner. En règle générale, ils succombent à la tentation : c'est une tendance naturelle.

MISE EN FACTEUR COMMUN

J'étais très accueillant cette année et j'étais prêt à faire un sort à toute structure qui aurait bien voulu se présenter.

Mais je ne m'attendais tout de même pas à traiter de la mise en facteur commun.

Un matin, Michel Robin écrit :

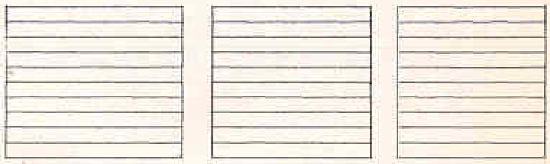
10 *o* + 10 B + 10 m

ce qui signifie 10 réglettes oranges + 10 réglettes bleues + 10 réglettes marron.

(Je vous en donne la traduction)

dix 10 + dix 9 + dix 8.

Pressentant que ça pouvait être intéressant, j'ai fait venir le CE_1 autour de Michel qui a d'abord réuni les réglettes séparément



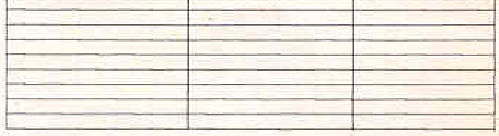
10 o 10 B 10 m

C'est alors que nous sont apparues clairement deux possibilités d'exprimer la situation.

En effet, Pierrick a demandé :

– *Pourquoi on ne les fait pas se toucher ?*

– *Bon, allons-y.*



o + B + m

On pouvait alors dire comme avant :

10 o + 10 B + 10 m

ou bien 10 trios (o + B + m)

(J'emploie l'expression trio, mais il vaut peut-être mieux dire triple ou triplet).

Et l'on avait :

10 o + 10 B + 10 m = 10 (o + B + m).

Je me suis exclamé :

– *Mais, c'est de la mise en facteur commun.*

Ils ont ri :

– *Le facteur, le facteur ! C'est Monsieur Prigent.*

– *Ah ! non, c'est Roger Le Goff.*

J'ai eu une inspiration.

– *Quel est votre facteur ?*

Et l'on a trouvé que Roger, c'était le facteur commun à Patrice, Pierrick, Michel, Patrick et Christian.

Et Monsieur Prigent, c'est le facteur commun à Rémi, Jacques, Pascal, Jean-François et Robin.

Ce qui peut s'écrire :

Roger (Patrice + Pierrick + Michel + Patrick + Christian) et Monsieur Prigent (Rémi + Jacques + Pascal + Jean-François + Robin).

Et ça se lit " facteur de ".

Et pour 10 o + 10 B + 10 m c'est 10 le facteur commun.

Cela s'écrit 10 (o + B + m).

Ainsi, en partant d'une invention écrite de Robin et en se repérant aux réglettes et à la vie, nous avons accroché une notion pourtant difficile. J'ai appris, au cours de l'année, à respecter les créations des enfants. Rien n'est vraiment gratuit. Et, bien souvent, je me suis aperçu que de petites folies débouchent souvent sur la grande raison.

Ceci me paraît important, quoique en marge de ce que l'on fait habituellement. Pardon, ce n'est pas en marge de ce que l'on fait habituellement à l'Ecole Moderne en français, en chant, en dessin et en peinture. Mais c'est en marge de ce que l'on fait habituellement en calcul.

En calcul, comme en " parlé ", certains camarades craignent le " n'importe-quoi ". Mais ne faut-il pas surtout craindre d'être le " n'importe qui ", c'est-à-dire celui qui ne sait pas voir ce qu'il y a toujours de profond dans toutes les créations enfantines, même celles qui, en apparence, sont les plus folles.

Quant à moi, j'ai fait mon choix. Ce choix est-il le bon ? J'ai l'outrecuidance de le croire. Figurez-vous que je m'imagine qu'il faut aussi favoriser le tâtonnement expérimental sur le plan de la pensée.

Bachelard a écrit : " *Le réel sert à nous faire penser* ".

Ainsi le réel ne serait pas l'essentiel ; c'est de penser qu'il s'agit surtout. Et l'on peut partir aussi bien d'une rêverie, d'une création d'enfant, d'une astuce, d'un dessin, d'un quiproquo, d'une construction géométrique réelle ou artificielle que de la vie. L'essentiel c'est de penser.

A quoi pensait Robin quand il a écrit 10 o + 10 B + 10 m. Il pensait bien à quelque chose qu'il voyait intuitivement dans son ensemble, ou bien il n'avait qu'un maillon de la chaîne.

Qu'importe, puisque la classe lui permet d'obtenir un développement de sa pensée.

Puisque j'étudie ici l'accrochage d'une notion, je précise que, moi, le maître, je n'avais pas d'idée préconçue, je ne savais pas du tout où nous pouvions arriver.

Ici, évidemment, j'ai aidé volontairement et involontairement à préciser l'idée.

J'ai pu le faire parce que je savais ce que c'était la mise en facteur commun. Mais il y a certainement beaucoup de choses auxquelles je ne puis penser parce que je n'en suis pas informé. Alors, je sens qu'il faut que je m'informe. Je n'étudie pas, non, car je n'ai pas besoin d'être informé de beaucoup de choses. La connaissance vraie ne vient que de la pratique. Et, comme c'est d'une connaissance pédagogique que j'ai besoin, la pratique pédagogique me suffit bien. Mais je suis placé dans des conditions un peu spéciales. En effet, j'accepterais avec joie de faire ce que l'on me dirait de faire. Mais jusqu'ici, personne n'a voulu me dire ce qu'il fallait faire. Alors, je suis contraint de passer au quatrième moyen de la connaissance : la découverte.

C'est le bon côté des nouvelles mathématiques, et de la pédagogie de ces mathématiques. Dans ces domaines, le maître est presque aussi inculte que ses élèves et cette humilité obligatoire lui permet d'être à leur niveau et de mieux les sentir. Le maître s'intègre donc au groupe : il est de plain-pied avec ses élèves. Il est le copain qui sait à peine un peu plus et non le professeur qui est à cent lieues de ses élèves, seul dans sa toute sapience. Le maître est un élément de l'équipe de recherche. Son rôle, c'est de chercher et de chercher encore des informations pour l'équipe. Afin que l'on ait toujours de nouveaux domaines à explorer.

Car la série des quatre moyens de la connaissance : lire (s'informer) - voir - faire - découvrir serait incomplète si elle ne débouchait, après la découverte, sur une reprise de l'information (pour recommencer le cycle).

Je crois qu'il faudrait aux maîtres une sorte de S.V.P. pédagogique que l'on pourrait consulter à tout moment. Cela peut se constituer facilement sur le plan local (camarades professeurs, fils étudiants, collègues avertis). Et puis nous allons avoir la rubrique de Pellissier, des brochures, des livres de la CEL et d'ailleurs.

Je voudrais dire un dernier mot du jeu de mots : " facteur des PTT " et " facteur de ". Il nous a fait rire ; donc, nous avons éprouvé un sentiment. Et c'est cette émotion qui permet de mieux fixer les souvenirs.

Après une année d'expériences, je me rends compte que, à chaque fois que nous avons donné sa place à la fantaisie, à l'inattendu, à l'insolite même, la référence a été mieux établie ; elle se plaçait dans le passé comme un îlot visible auquel on pouvait facilement revenir. Tout est licite, valable, raisonnable qui permet l'accrochage affectif. Mais lorsque c'est la joie qui est à la base, on retrouve la référence avec plus de plaisir et on est poussé en avant par ce souvenir heureux. Il faut, à tout prix, que des références de tous ordres : affectives, spatiales, événementielles, poétiques, artistiques, musicales etc... s'établissent.

A mon avis, le travail au CE_1, ce n'est pas de faire acquérir définitivement des connaissances, mais de mettre en place de multiples têtes de pont solides d'où l'on pourra partir ou repartir pour de nouveaux agrandissements du domaine royal.

Et maintenant, je reprends mon journal de bord.

LE NEUTRE DANS L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION

Je ne parvenais pas à m'expliquer pourquoi le *1* et le *0* présentaient tant d'attraits pour les enfants.

Une émission de télé " Chantiers Mathématiques " m'a éclairé lorsqu'elle m'a permis de comprendre ce que c'était que le *neutre.*

Le neutre dans l'addition et la soustraction, c'est zéro : il ne change rien aux résultats. Les enfants aiment beaucoup les égalités de ce genre :

$10\ 000 - 0 = 10\ 000$

$300 - 0 = 300$ $\qquad 0 + 0 = 0$

$7 + 0 = 7$

$1\ 000\ 000\ 000 + 0 = 1\ 000\ 000\ 000$

↾ + ⊠ = ↾ $\qquad$ ⍽ + ⊠ = ⍽

INVERSES ou SYMETRIQUES ou OPPOSES

Je crois que c'est Jacques qui a eu l'idée des paquets de zéros qui ne modifient en rien les résultats.

Exemple :

$10 + 10 - 10 + 10 - 10 + 10 - 10 = 10$

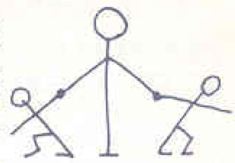
On s'est souvenu des parenthèses et on a isolé les paquets de zéro.

$10 + (10 - 10) + (10 - 10) + (10 - 10) = 10.$

Voici d'autres exemples :

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$
$18 - 8 + 8 = 18$
$q - q + q - q + q - q = 0$
$R - R + R - R + R - R + R = R$

Pour expliquer le mécanisme des inverses, ou, plutôt pour lui donner une coloration affective, je me suis mis devant le tableau et deux enfants me tiraient la main, chacun de son côté.



" Si un seul garçon tire, je bouge. Si les deux tirent, je ne bouge pas ". En effet Pascal et Christian qui avaient même taille et même poids *se neutralisaient.*

LE NEUTRE DANS LA MULTIPLICATION ET LA DIVISION

Evidemment, c'est le 1.

$10 : 1 = 10$ $\qquad \frac{1}{1} = 1$

$\frac{a}{1} = a$ $\qquad a \times 1 = a$

Les enfants aiment beaucoup les neutres 1 ($\times$, :) et 0 (+, –).

Au début, ils les mélangent un peu, puis, après tâtonnements ils les distinguent l'un de l'autre.

La notion de *neutre* est très importante car elle intervient dans la structure du groupe commutatif.

C'est une structure importante de la science d'aujourd'hui (Bachelard).

Soit une opération quelconque.

Appelons-la, si vous voulez :
étoile (signe $*$)

Si on a :

$a * b = b * a$ (commutativité)
$a * n = a$ (n = neutre)
$a * b * c = (a * b) * c$ (associativité)
$a * a^{-1} = n$ (a et son inverse donnent le neutre: exemples pour l'addition $1 + (-1) = 0$
pour la multiplication
$8 \times \frac{1}{8} = 1$

L'opération $*$ munit l'ensemble des nombres utilisés d'une structure de groupe.

Il n'est pas question de l'aborder en primaire. Mais si l'enfant connaît le neutre, l'associativité, la commutativité, l'inverse, il comprendra vite, quand on traitera de cette question.

A propos d'inverses et de neutres, je dois signaler que les enfants aiment également écrire des opérations du type :

$\frac{\text{jaune}}{\text{jaune}} = 1$ $\qquad 50/50 = 1$ $\qquad \frac{4}{4} = 1$ $\qquad \frac{5\ 000}{5\ 000} = 1$

$\frac{i}{i} = 1$ $\qquad a/a = 1$ $\qquad \frac{2\ 000}{2\ 000} = 1$ $\qquad \frac{1\ 000\ 000\ 000}{1\ 000\ 000\ 000} = 1$

$\frac{\wedge}{\wedge} = 1$ $\qquad \frac{\overline{X}}{\overline{X}} = 1$ $\qquad$ mais aussi $\qquad \frac{0}{0} =$ impossible.

Il faut maintenant signaler l'existence de

L'ENSEMBLE DES ENTIERS RELATIFS LES NOMBRES Z

L'ensemble des nombres naturels ou entiers positifs c'est l'ensemble N. Les nombres relatifs (entiers positifs et négatifs et nuls) font partie de l'ensemble Z.

On les trouve dans la vie :

- sur le thermomètre + 5, – 5
- sur le réveil 2 h 10, 2 h – 10.

Les enfants se donnent des opérations dans Z. Et tant pis si l'on obtient des nombres négatifs.

" Z c'est Zorro, il peut aller en-dessous de zéro ".

Je cite cette phrase pour montrer que les enfants ne sont pas longs à se créer des références à partir de la vie (ici, la télé).

Pour savoir si l'opération 4 – 8 est possible il faut préciser dans quel ensemble il faut choisir les nombres.

Ainsi dans N :. 4 – 8 est impossible
et dans Z : 4 – 8 = – 4.

CLASSES D'EQUIVALENCE

Nous avons déjà abordé l'algèbre moderne puisque nous avons parlé d'associativité, de commutativité, de symétriques etc. Mais en fait, cela ne vous paraît pas bien nouveau. Chez nous, ce qui a été nouveau c'est que l'on ne s'est pas contenté d'un exercice rapide après leçon du maître : non, au contraire, on a copieusement joué à ce calcul et c'est cette abondance de réalisations qui a été nouvelle.

Mais voilà qui est plus " math moderne ". Avec l'aide de mes enfants j'espère pouvoir vous faire assimiler facilement cette notion nouvelle sans que vous ayez à vous tendre la peau de l'occiput, comme je le faisais quand je " n'agissais " pas les mathématiques.

Reprenons ce cher calendrier de tous les jours. Non, auparavant, il faut que je vous dise que dans ma classe chaque enfant a un numéro.

Jacques c'est le 1 - Jean-François le 2 - Patrice le 3 - Christian le 4 - Robin le 5 - Pascal le 6 - Michel le 7 - Rémi le 8 - Pierrick le 9 - Patrick le 10.

Voilà pour le CE_1 (10 élèves).

Nous avons eu la chance d'avoir 10 élèves au CE_1 parce que le CP est homologue du CE_1, le 1 du CP c'est le 11 de la classe.

Voici d'ailleurs mes 24 élèves.

1	6	11	16	21
2	7	12	17	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	
CE_1		C.P.		

Je donne cette indication parce que cette personnalisation des nombres a son importance. Elle permet d'introduire cette chère affectivité qui est le catalyseur souverain de toute acquisition.

A la télé (Chantiers mathématiques) j'avais saisi les classes d'équivalence. Je me suis dit " Pourquoi ne pas les offrir aux enfants ". En effet, dans ce domaine de la création et de l'observation ou, si l'on préfère, de l'invention et de la découverte, nous n'avons pas encore de programme parce que nous n'avons pas encore su nous pencher sur les créations de l'enfant. Alors, pour établir le programme, il faut bien expérimenter. Alors, pourquoi pas les classes d'équivalences ? L'an dernier, je les avais introduites par le biais d'un jeu de numéros que l'un distribuait.

Le 1 à Philippe - Le 2 à Yann - Le 3 à Pierrot - Le 4 à moi - Le 5 à Philippe - Le 6 à Yann - Le 7 à Pierrot - Le 8 à moi.

Evidemment, il valait mieux les introduire artificiellement que de ne pas les introduire du tout. Mais cette année, parce que *je les avais assimilées*, j'ai su les voir dans la vie de tous les jours. Elles étaient là, sous mon nez et je ne les voyais pas. Et pourtant j'avais à ma disposition le calendrier.

LE CALENDRIER

Voilà quelque chose de simple, de familier à l'Ecole Moderne qui s'en sert souvent pour son calcul vivant.

Savoir ce qu'il y a dans ce calendrier. Voici le mois de janvier par exemple.

janvier	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30	31				

Et puis, voici le mois de *février*.

1	8	15	22
2	9	16	23
3	10	17	24
4	11	18	25
5	12	19	26
6	13	20	27
7	14	21	28

Dans ma classe, nous avions affiché octobre, novembre, décembre sous la forme horizontale de janvier : 1 - 2 - 3 etc.

Mais pour briser l'habitude naissante, nous avons introduit un système différent d'affichage sur la plaque de contre-plaqué.

En fait, la dominante, c'est le système janvier. Il faut toujours une dominante parce qu'il faut une référence solide. Et s'il y avait égalité des présentations horizontale et verticale, la référence serait fluctuante, ce ne serait pas une référence, mais une confusion. Aussi, le mois de janvier est-il constamment affiché (ce pourrait être octobre, décembre).

Mais la présentation du système février introduit la possibilité d'une autre présentation. C'est bien de semer cette graine qui empêche les enfants d'être conditionnés définitivement à un système. Il faut introduire la deuxième possibilité parce que les tableaux que fournit la vie sont présentés indifféremment sous les deux angles qui se complètent.

A vrai dire " c'est la même chose, à part que c'est le contraire ".

Mais il est d'autres présentations :

Voici celle qu'a voulue Patrice (708) pour mars.

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	
		22	23	24		
			25			
	26	27	28	29	30	31

1ère constatation

On aurait dû attendre avril parce que avec 30 jours, cela aurait été parfaitement symétrique.

2ème constatation

Ce que l'on peut voir à gauche dans 1 - 2 - 5 - 10 - 17 - 22 - 25 c'est la progression arithmétique (et la régression) de la différence (raison ?)

1 - 3 - 5 - 7 - (5 - 3)

A droite également

1 - 4 - 9 - 16 - 21 - 24 - 25

Différences : 3 - 5 - 7 - 5 - 3 - 1.

Oui, mais, en plus, 1 - 4 - 9 - 16, ça ne vous rappelle rien ?

Soyez tranquilles, les enfants la découvriraient bien, cette succession de carrés, si cette présentation restait en permanence au tableau.

Pour avril, Robin a voulu le carré de 5.

avril :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27			30
28	29			

Après on ne pouvait mettre ni le carré de 4 ni celui de 3, mais simplement celui de 2 et celui de 1 :

$$5^2 + 2^2 + 1^2 = 30$$

Pour mai, Pierrick a dit :

- On va mettre d'abord le carré de 1 puis le carré de 2, puis celui de 3 et comme cela jusqu'à 10.

Mais nous avons vu qu'on ne pouvait pas aller si loin.

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	
	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$	$\boxed{31}$
			$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{23}$	$\boxed{24}$	$\boxed{25}$	$\boxed{26}$	
						$\boxed{27}$	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	$\boxed{30}$	

Ce qui donnait :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2 = 31$

Là aussi, cela aurait été mieux en avril

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

C'eût été plus net.

Pour *Juin* voilà ce que ça a donné :

1						
2	3					
4	5	6				
7	8	9	10			
11	12	13	14	15		
16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

En fouillant cette structure on a découvert que 1 - 3 - 6 - 10 - 15 - 21 - 28, c'est successivement :

1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4 etc.

Mais reprenons ce cher calendrier de tous les jours.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Un jour, par hasard, alors que nous venions d'épingler le feuillet de la veille sur le tableau de contre-plaqué, Jacques (1) a dit :

– Oh ! Monsieur, j'ai trois enfants Rémi (8) Gilbert (15) et Roger (22). 1 - 8 - 15 - 22, c'est ma famille.

Heureusement, je venais de voir une émission à la télé et j'étais prêt à recevoir cette découverte de Jacques et à en tirer parti. J'ai dit :

– Non, Jacques, ce ne sont pas tes enfants ce sont tes élèves 1 - 8 - 15 - 22, c'est ta classe.

– Moi aussi, dit Jean-François (2) ma classe a aussi 4 élèves 2 - 9 - 16 - 23. Mais c'est la classe des fainéants car nous sommes tous des dimanches (Regardez janvier 66 ou octobre 66).

Pascal (6) dit :

– Nous aussi c'est la classe des fainéants parce que nous sommes des jeudis 6 - 13 - 20.

Jacques alors s'interroge :

– Comment se fait-il qu'il n'y ait que des samedis dans ma classe ?

– Eh bien ! cherchez.

– –

Ils lisent la première ligne :

1	2	3	4	5	6	7
samedi	dimanche	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi

puis la deuxième

8

samedi

– Ça y est, j'ai compris dit Patrice. Quand on a liquidé S. D. L. M. M. J. V. ça recommence à Jacques S.

– Et qu'est-ce que c'est S. D. L. M. M. J. V. ?

– C'est tous les jours de la semaine.

Pierrick scrute le calendrier

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

puis il dit :

– Ça y est, j'ai trouvé quelque chose. 8 c'est une rangée complète et 1.

Patrice enchaîne :

15 c'est 2 rangées de 7 et 1
22 c'est 3 rangées de 7 et 1
29 c'est 4 rangées de 7 et 1

Je demande alors :

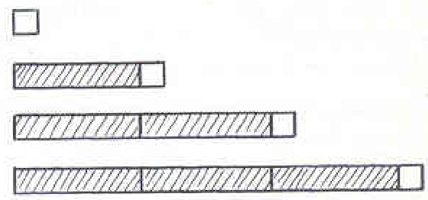
– Et 1 ?

La réponse ne se fait pas attendre :

– C'est zéro rangée de 7 et 1.

Nous prenons alors les réglettes de la classe et nous mesurons 8, 15, 22, 29 par la réglette noire 7. Et à chaque fois, nous voyons qu'il reste un petit blanc (1).

1
8
15
22



C'est donc la famille " reste 1 " quand on mesure par 7. Ou encore, pour employer un terme " moderne " famille reste 1 (modulo 7).

Ou encore, on peut dire c'est la classe " reste 1 " ou classe $\dot{1}$

et 2 - 9 - 16 - 23, c'est la classe reste 2 (modulo 7) ou $\dot{2}$ (modulo 7)

Les 31 nombres se répartissent donc dans 7 classes :

$\dot{1} \quad \dot{2} \quad \dot{3} \quad \dot{4} \quad \dot{5} \quad \dot{6} \quad \dot{0}$

Ne vous contentez pas de me lire mais prenez les feuillets d'un calendrier ou écrivez les nombres, ou bien examinez les mois de 31 jours tels qu'ils sont sur certains calendriers (C'est le mois d'août le meilleur parce qu'il commence par lundi).

1965	OCTOBRE					NOVEMBRE				
LUN		4	11	18	25	*1*	8	15	22	29
MAR		5	12	19	26	2	9	16	23	30
MER		6	13	20	27	3	10	17	24	
JEU		7	14	21	28	4	*11*	18	25	
VEN	1	8	15	22	29	5	12	19	26	
SAM	2	9	16	23	30	6	13	20	27	
DIM	*3*	*10*	*17*	*24*	*31*	*7*	*14*	*21*	*28*	

Je ne l'ai pas sous la main mais je vous fournis novembre de 1965 (présentation verticale).

Vous voyez, ce sont des choses de la vie courante. Il suffit d'ouvrir les yeux pour les voir. C'est cela, la caractéristique de la pédagogie Freinet des maths. On peut tout trouver dans la vie.

Si, par exemple, vous allez à la poste et parce que vous êtes distrait, vous la dépassez sans y prendre garde, il faudra bien revenir sur vos pas pour jeter votre lettre à la boîte. Malheureux ! vous êtes en pleine relation de Chasles.

Je vous l'affirme : maintenant, la vie va éclairer les maths et les maths vont éclairer la vie. Et vous comprendrez même la géométrie vectorielle etc.

Revenons au calendrier :

La classe $\dot{1}$ c'est 1 - 8 - 15 - 22 - 29..... parce que ces nombres divisés par 7 donnent 1 pour reste.

On appelle aussi ces classes, des classes résiduelles (reste $\longrightarrow$ résidu). Mais elles ont un autre nom : classes d'équivalence. On écrit que

1 est équivalent à 8, à 15, à 22, à 29 (modulo 7). Et cela s'écrit

$$1 \equiv 8 \equiv 15 \equiv 22 \equiv 29 \ (\text{mod. } 7)$$

On peut écrire aussi la classe $\dot{2}$

$$2 \equiv 9 \equiv 16 \equiv 23 \equiv 30 \ (\text{mod. } 7)$$

Et les classes $\dot{3}$, $\dot{4}$, $\dot{5}$, $\dot{6}$

Il en manque une ; ce n'est pas la classe $\dot{7}$; c'est la classe $\dot{0}$. La division par 7 s'y fait exactement 0 - 7 - 14 - 21 - 28 -

Elle est spéciale - elle a un nom spécial c'est la classe des multiples de 7 - Nous la retrouverons.

Vous le voyez, tout cela, c'était sous mes yeux. Et ce n'est pas du tout artificiel. On dit souvent :

– Le 30, ce sera quel jour ? Attendez - on est aujourd'hui mardi 8. Donc mardi 15, mardi 22, mardi 29. Ce sera un mercredi.

On dit aussi dans 8 jours - dans 15 jours - ou aujourd'hui en 8, en 15.

Dans ma classe, pour tout ce qui concerne les modulos et les classes d'équivalence, la référence, c'est le calendrier. Et c'est aussi le modulo 7 qui est particulièrement intéressant.

Certains enfants adorent les modulos. Ils s'en construisent sur modulo 10

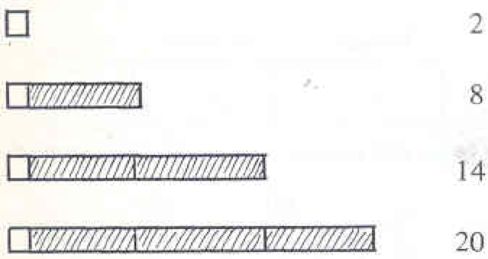
$2 \equiv 12 \equiv 22 \equiv 32$

mais transposent sur modulo 9

$9 \equiv 19 \equiv 29 \equiv 39$

ce qui est faux évidemment. Les restes de la division par 9 sont différents. Et cela se démontre très bien par le Cuisenaire.

Certains enfants trouvent le truc pour avoir des classes d'équivalence juste avec le Cuisenaire : ils commencent par le reste



$2 \equiv 8 \equiv 14 \equiv 20$ (modulo 6)

Et au lieu de tâtonner sur

$D = d + d + d + r$

Ils tâtonnent sur

$D = r + d + d + d.$

Ils en ont le droit.

Patrice, lui, part de la classe 0 et il enlève toujours 1

$6 \equiv 12 \equiv 18 \equiv 24$
$5 \equiv 11 \equiv 17 \equiv 23$
$4 \equiv 10 \equiv 16 \equiv 22$
$3 \equiv 9 \equiv 15 \equiv 21$
$2 \equiv 8 \equiv 14 \equiv 20$
$1 \equiv 7 \equiv 13 \equiv 19$

Les différences restant égales, les classes d'équivalence subsistent.

Il est malin : c'est un bon truc.

Puis Pierrick est parti de là vers les progressions

0 - 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36 - 42 - 48 - 54 - 60 etc.

C'était une nouvelle piste. Et c'est aussi la table de multiplication.

Puis on est arrivé au modulo 2 qui permet de classer les nombres pairs et les nombres impairs.

Les premiers divisés par 2 donnent un quotient exact.

Les seconds donnent pour reste 1.

On peut additionner les classes d'équivalence

$$\dot{1} + \dot{1} = \dot{0}$$

La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Les classes d'équivalence jettent une lumière nouvelle sur la parité.

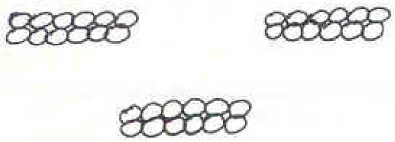
SYSTÈMES NON DÉCIMAUX

On peut les aborder aussi par le calendrier parce qu'il fait partie de la vie.

Mais, il y a d'autres choses bien intéressantes dans la vie, par exemple la pêche aux ormeaux (ou les douzaines d'œufs).

C'est facile, les systèmes non-décimaux. C'est même enfantin puisque les enfants les assimilent très bien. Mieux que les adultes qui ont été si bien conditionnés au système décimal qu'ils perdent la boussole lorsqu'ils sortent de leur cage. On peut jouer sans danger avec ces systèmes parce que l'on dispose d'une référence solide imposée par la vie : le système décimal. Il ne se diluera jamais dans l'atmosphère. Il est bon que les enfants se sentent à l'aise dans tous les systèmes. C'est facile lorsqu'on part de la vie. D'ailleurs, dans la vie, les petits Anglais, les Canadiens, les Américains sont bien obligés d'en tenir compte. Mais en France aussi, c'est facile. Surtout quand l'on revient de la pêche.

Vous étalez votre cueillette sur la table. Vous avez 36 ormeaux par exemple. Vous ne les comptez pas, un par un, non, vous fabriquez des douzaines. Et cela fait



3 douzaines

Vous aviez trois dizaines et 6 ormeaux et vous en faites 3 douzaines et zéro. Vous pouvez faire un tableau :

douzaines	ormeaux seuls
3	0

Ainsi 36 s'écrit 30 dans le système à base 12

10	
3	6

12 [1]	
3	0

Si vous avez 65 minutes, cela fait

soixantaines	minutes seules
1	5

ou

heures	minutes
1	5

donc 65 s'écrit

60	
1	5

Revenons au calendrier

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Il y a quatre semaines et 3 jours, on peut écrire

semaines	jours
4	3

ou

7	
4	3

(1) C'est une notation de mon invention. Je crois qu'on doit écrire 30_{12}, ce qui signifie 30 dans le système 12.

Et c'est 31 dans le système décimal que l'on écrit par convention sans préciser la base

31 et non

10	
3	1

Mais le calendrier disposé verticalement est encore plus lisible dans le système 7 parce que les semaines et les jours seuls sont à leur place.

1 8	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1
2 9	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1
3 10	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1
4	1 1	1 1 1	1 1 1 1
5	1 1	1 1 1	1 1 1 1
6	1 1	1 1 1	1 1 1 1
7	1 1	1 1 1	1 1 1 1

7		7		7		7	
1	3	2	3	3	3	4	3

c'est

10	17	24	31

Cette constatation est très intéressante parce que les enfants qui inventent le damier à cent cases dans le sens " vertical " comprennent mieux pourquoi ils trouvent

1	11	21	31	41	51	61	71	81
2	12	22	32	etc.				
3	13	23	...					
4	"	"						
etc.	"	"						

Et cela leur permet de mieux assimiler le damier à 100 cases " horizontal ". Il faut démystifier le système 10 et ne pas laisser croire qu'il nous est descendu du ciel et que c'est un mystère.

D'ailleurs, on peut laisser tâtonner abondamment dans les systèmes car, chers enseignants du calcul, qu'est-ce que c'est que ce travail, sinon de la division ?

– Non, la division c'est ça

31	7
3	4

– Oui, bien sûr, mais nous avons vu que c'était aussi

	$7 + 7 + 7 + 7 + 3 = 31$	$d + d + d + d + r = D$
et	$31 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3$	$D - d - d - d - d = r$
et	$(4 \times 7) + 3 = 31$	$(d \times q) + r = D$
et	$31 - (4 \times 7) = 3$	$D - dq = r$

Et voilà que ça aussi

$$\begin{array}{c} 7 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \end{array} \\ 31 \end{array}$$

c'est de la division.

Mais alors le système décimal, c'est de la division ? Mais oui.

C'est même, il me semble, la division d'un nombre par le polynôme

$$10^n \ldots\ldots + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$$

Naturellement on arrive rapidement aux tableaux à 3 cases, à 4 cases etc.

$$\begin{array}{lcc} & \begin{array}{r} 7 \\ \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \end{array} \end{array} & \begin{array}{r} 7 \\ \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \end{array} \end{array} \\ \text{c'est} & 66 & 459 \end{array}$$

Explication

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 7^3 & 7^2 & 7^1 & 7^0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \end{array} \\ 459 \end{array}$$

et le tâtonnement est très intéressant. C'est de la division où l'on se soucie beaucoup des restes.

Nous, nous sommes favorisés parce que nous avons un trésorier des 1, un trésorier des 10 etc... Voici leur nom

Philippe les 1 000 Bouffant les 100

Patrice les 10 Brient les 1

Puis on est arrivé à

Philippe	Bouffant
10^3	10^2
Patrice	Brient
10^1	10^0

Cette personnification des puissances est intéressante parce que lorsque nous changions de système nous retrouvions nos garçons

<u>*Système 7*</u>

Philippe	Bouffant	Patrice	Brient
7^3	7^2	7^1	7^0

<u>*Système 2*</u>

2^3	2^2	2^1	2^0

Naturellement, nous avions aussi des paquets, des sacs, des valises pour les puissances *1*, puissances *2*, puissances *3*, mais nous les abandonnâmes rapidement.

Je n'insiste pas sinon pour dire que, après, pour nous, 1966 c'était clair.

10^3	10^2	10^1	10^0
1	9	6	6

(1) Remarque : Les Canadiens ont le système binaire dans la vie courante

gallon	demi-gallon	chopine	pinte	demiard
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

QUADRILLAGES

Cette activité a été une révélation pour moi. Jamais je n'y aurais songé ! Ce qui prouve que si le maître se contente d'offrir ce qu'il sait, de maintenir le groupe dans les seuls chemins qu'il connaisse, il y a, pour les enfants, un manque à gagner considérable.

Et l'on a tout intérêt à faire confiance à la créativité enfantine qui déborde heureusement le maître et ses étroites limites.

Un jour nous avons reçu la brochure sur le rectangle, de Serge de Buzet. Les enfants se sont emparés de l'idée et ils se sont mis à tâtonner sur les quadrillages. Et soudain, Jacques a écrit des nombres à l'intérieur. Et l'aventure riche et originale des quadrillages a commencé.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

Nous avons examiné cette création de Jacques et nous avons vu qu'il y avait la colonne des impairs et la colonne des pairs. (La parité plaît beaucoup aux enfants.)

Voici maintenant ce que Robin a fait : il a écrit les 100 premiers nombres comme s'il voulait faire un damier à 100 cases mais il a colorié en rouge toutes les cases paires et cela donne des bandes blanches et rouges.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Robin, très content de sa réussite, recommence

Mais cette fois c'est à 36 cases.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

On le voit, c'est simple, la parité donne une structure de bandes.

Christian attiré par la beauté des créations de Robin se lance sur cette piste ouverte par Jacques. Et soudain, que découvre-t-on : la structure de damier.

Comment cela se fait-il ?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

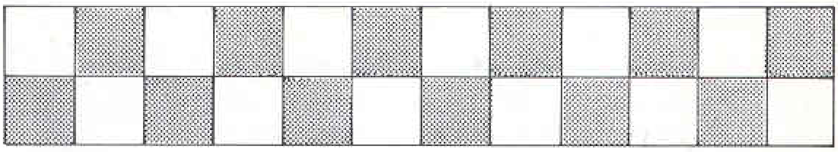
Alors que pour le carré de 10 sur 10 et le carré de 6 sur 6 les pairs étaient rangés par bandes ; ici, cela change. La question est posée mais elle ne reçoit pas de réponse, du moins, pas immédiatement.

Comment cela se fait-il ? Comment cela se fait-il ?

Et voilà que Robin crée.

1		3		5	
	2		4		6

En observant cette création, on découvre que ça commence par un blanc et ça finit par un rouge parce qu'il y a un nombre exact de couples (blanc-rouge). Or, les couples, on les connaît, ça oui! parce qu'on a eu les réglettes Cuisenaire entre les mains. Je vous rappelle la fameuse égalité référence de Rémi.



blanc + rouge + b + r + b + r + b + r = r + b + r + b + r + b + r + b

ou 4 (b + r) = 4 (r + b)

Quelle coïncidence extraordinaire : Ici, nous avons encore des couples " blanc-rouge " qui se raccrochent donc ce 15 février, à des couples aperçus le 15 octobre.

On s'aperçoit que, pour le carré de 7 sur 7 de Christian, en haut, il y a 3 couples complets et il reste 1. Le quatrième couple est partagé en deux alors que pour 6 et 10 les couples restaient complets.

– Alors ?

– Alors, quand la ligne du haut est un nombre pair, on a des bandes et, quand c'est un nombre impair, on a un damier, parce que celui qui est seul dérange toute la ligne suivante.

Mais la construction de Christian ne nous avait pas apporté que cela. En effet, Robin et Michel s'étaient écriés :

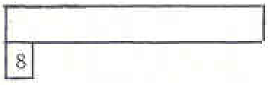
– Mais, Monsieur, la création de Christian c'est la même chose que le calendrier. C'est juste pareil.

– Comment cela ?

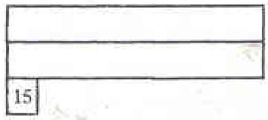
– Parce que dans la première rangée du calendrier il y a aussi 7 feuillets.

– Ah ! tiens, oui c'est vrai.

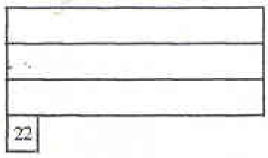
Et les enfants découvrent que là aussi, comme sur le calendrier, le 8 est sous le 1 parce qu'il y a une rangée et 1.



1 rangée et 1



2 rangées et 1



3 rangées et 1

On retrouve les classes d'équivalence : 8 - 15 - 22 sont de la même famille : la famille reste 1 (quand on divise par 7) (modulo 7).

C'est la famille de Jacques.

On peut écrire :

$1 \equiv 8 \equiv 15 \equiv 22$ (modulo 7)

c'est-à-dire :

1 équivalent à 8 équivalent à 15 équivalent à 22 (modulo 7).

On retrouve exactement ce que l'on avait trouvé dans le calendrier. On le voit, il n'y a pas besoin de s'occuper d'assimilation. Il suffit d'aller de l'avant, il y a toujours des recoupements.

Et je prévois que bientôt on se contentera de marcher sans jamais chercher à faire rentrer les choses dans les têtes. Au bout de 5 années de cette recherche ininterrompue, la moisson serait prodigieuse (pour rentrer en 6ème. Et pourquoi ne pas continuer après au 1er et second cycles par une continuelle remise en ordre de l'acquis).

Mais, chut, regardez, ce n'est pas fini. En effet, Pierrick compare les deux créations de Robin et de Christian :

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25 etc.					

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29 etc.						

Il pose la question

– Comment, pour Christian, il y a un 8 sous le 1 et pour Robin, il y a un 7 sous le 1. Il doit y avoir une erreur.

Le 7 n'est pas dans la famille de Jacques puisque la famille de Jacques c'est 1 - 8 - 15 - 22. Et ici, c'est pas juste : on a 1 - 7 - 13. Pourquoi ?

– Eh bien ! cherchez.

– Ça y est, dit Patrice, je sais pourquoi. C'est parce que pour Robin c'est le modulo 6, ce n'est plus le modulo 7.

– Ah, oui ! dit Pierrick. Et pour l'autre carré de Robin (10 × 10) la famille de Jacques c'est 1 - 11 - 21 - 31 etc.

Alors pendant un bon moment la classe se trouve submergée par les quadrillages (avec un retour offensif des modulos).

$1 \equiv 5 \equiv 9$ (modulo 4)

$2 \equiv 8 \equiv 14$ (modulo 6)

Voici un exemple de quadrillage.

La famille $\dot{1}$ c'est 1 - 5 - 9 - 13 (reste 1, modulo 4)

La famille $\dot{2}$ (celle de Fanfan) c'est 2 - 6 - 10 - 14 (reste 2 mod. 4)

La famille $\dot{3}$ (Patrice) c'est 3 - 7 - 11 - 15

La famille $\dot{0}$ (Robin) 0 - 4 - 8 - 12 - 16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Et les enfants ne sont pas longs à découvrir une loi des quadrillages : la classe $\dot{0}$ est toujours à la fin. Par exemple pour 6 c'est

$\dot{0}$ - 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36.

C'est la classe zéro parce que la ligne du haut est complète et après il ne reste plus rien. Ainsi dans le quadrillage 4 × 4 on a une rangée de 4, c'est 4. 2 rangées, c'est 8 etc.

Je dis aux enfants la classe $\dot{0}$ a un nom, c'est la classe des multiples. Ici les multiples de 4 c'est 0 - 4 - 8 - 12 - 16 et les multiples de 6 c'est 0 - 6 - 12 - 18.

Jacques dit alors :

– *J'ai compris, on commence toujours par zéro.*

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8

0. 3. 6. 9. 12

0. 7. 14. 21.

C'est alors la grande aventure des multiples si réjouissante pour ceux qui auraient souci de tables de multiplication (ce n'est pas mon cas).

Certains enfants poussent jusqu'aux multiples de 12, de 16, de 19 etc. rien ne les arrête. Ce qui est intéressant, c'est que cela vient d'eux et qu'ils ont, alors, un courage forcené. Tandis que...

Vous voyez comment nous avons dérivé de la moitié du rectangle de Serge aux quadrillages, à la parité, aux multiples. Mais voici que l'on revient en arrière, à la lumière des dernières découvertes.

Tiens, mais c'est ce que Jacques avait fait.

Tiens 2 - 4 - 6 - 8 ce sont les multiples de 2.

– Et 1 - 3 - 5 - 7.

– C'est la classe $\dot{1}$, la classe de Jacques, la classe d'équivalence $\dot{1}$

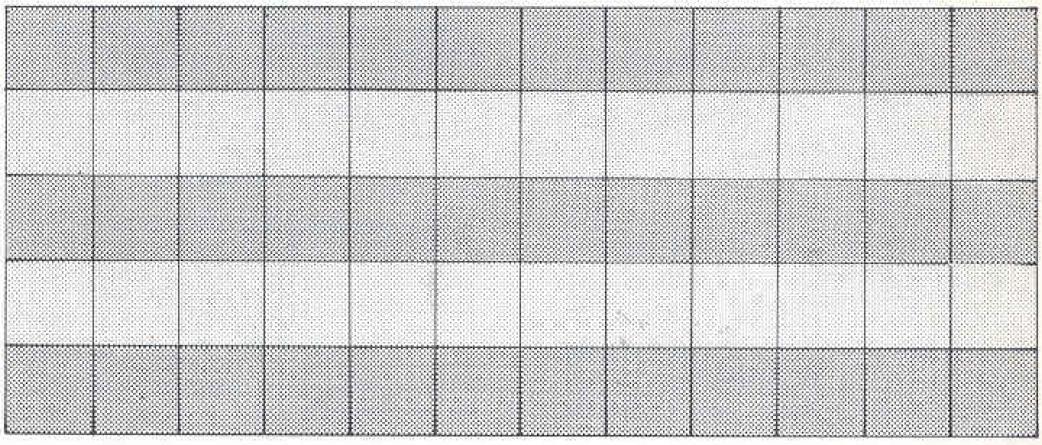
(modulo 2)

1	2
3	4
5	6
7	8

Car dans le modulo 2 il n'y a que deux classes : les multiples (la classe 0) et la classe 1, ou encore la famille - reste 1 (modulo 2).

Voilà qui projette encore une lumière nouvelle sur la parité.

Mais pendant ce temps le fleuve marche. S'arrêterait-on à des quadrillages ? On va bientôt leur échapper. Mais pour l'instant les enfants colorient horizontalement leurs bandes et ils n'inscrivent plus leurs nombres.



Quelqu'un demande :

– *Combien y a-t-il de carrés là-dedans ?*

– *Cherchez.*

– *Eh bien ! : 12 carrés dans la ligne du haut. 5 bandes ça fait 60.*

– *Oui, parce qu'on peut dire 5 fois 12* (12 × 5) = 60.

Ainsi, ils ont retrouvé seuls, sans que personne ne leur demande rien, le calcul de l'aire du rectangle.

Au début de ma carrière, je faisais la leçon une bonne fois pour toutes (malheur à celui qui n'était pas là le jour de la leçon). Et avec une simple démonstration, si claire à mes yeux, il fallait avoir compris.

Tandis que maintenant, après un tâtonnement " innombrable ", cela est parfaitement assimilé.

Mais voici que Patrice invente quelque chose. Il fait un quadrillage sur ses deux pages de carnet de maths. Et cette fois il ne met pas de couleur.

Robin lui emboîte le pas : il quadrille une feuille. Il calcule, 20 bandes de 33 cela fait 660 carrés.

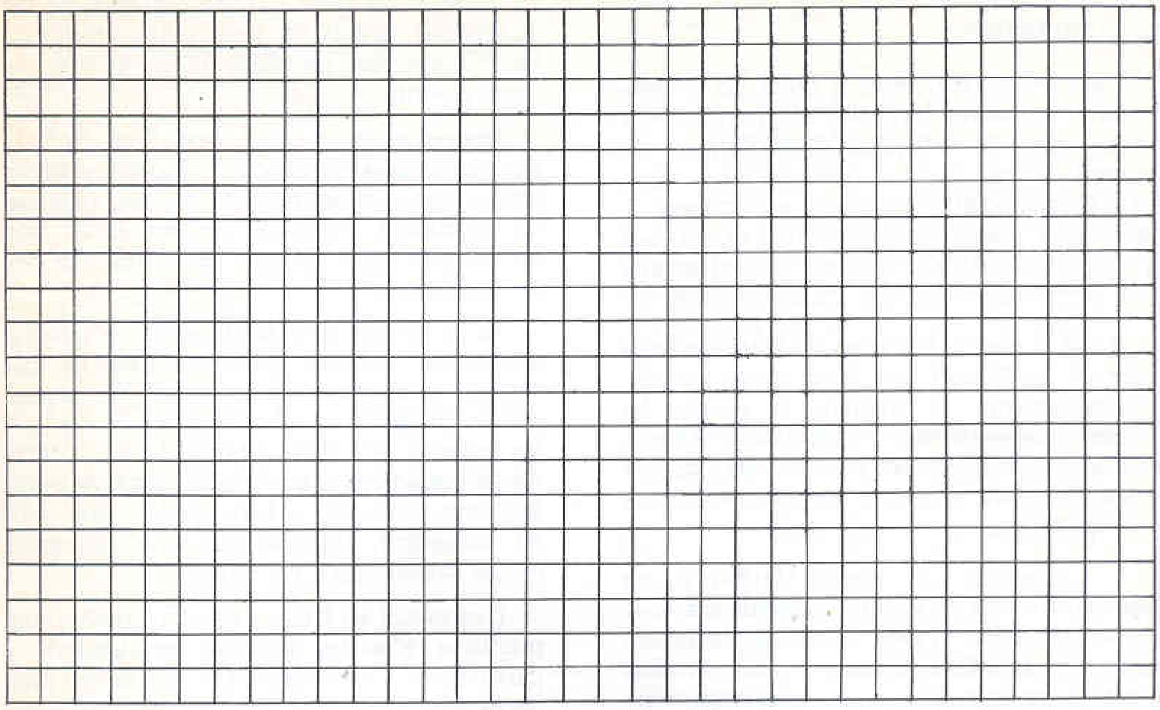
Je n'en reviens pas : 660 carrés dans cette seule page.

Mais il faut bien se rendre à l'évidence.

Bien sûr je savais calculer 20 × 33 = 660.

Mais j'ignorais ce que cela pouvait représenter en réalité parce que je n'avais travaillé que dans l'abstraction. Mais les enfants, eux, sauront ce que représentent 20 × 33 carrés.

L'absence de couleur nous permet de retrouver la commutativité de la multiplication en regardant aussi les bandes verticales.



Ainsi il y a un progrès vers l'abstraction parce que l'on se passe du soutien de la couleur.

Et un jour on abordera le rectangle nu dans toute sa pureté.

Il se peut par la suite que la formule $S = L \times l$ soit introduite au cours de la carrière scolaire de l'enfant. Mais cela se fera sans dommages parce qu'il y aura eu au préalable un double tâtonnement : tâtonnement sur les symboles et tâtonnement sur le rectangle. Et la loi sera alors parfaitement acceptée et assimilée.

J'ai triché. Robin ne m'avait pas présenté 20 bandes de 33 mais 19 bandes de 33 ; je pensais bien que c'était au-dessus de ses forces et je lui avais dit de prolonger ses traits pour avoir une 20ème bande. Alors il a calculé 10×33 et puis 20×33

Mais je trouve sur son carnet :

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 33 \\ \hline 57 \\ 57 \\ \hline 627 \end{array}$$

Je m'exclame :

– Quoi, tu sais faire ces opérations à deux chiffres ? Pourtant on ne les avait vues qu'une seule fois à toute vitesse quand Patrice m'avait demandé comment on les faisait.

– Oui j'avais compris et maintenant je vais continuer. Alors il a cherché :

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 33 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 33 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 33 \\ \hline \end{array} \qquad \text{etc.}$$

$$\text{jusqu'à} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ \times\ 33 \\ \hline \end{array}$$

Naturellement plusieurs de ses camarades lui ont emboîté le pas. Si bien qu'on a tourné la page du quadrillage pour aborder la multiplication.

Le moment est venu, je crois, de complimenter le maître. Au lieu de maintenir à toute force le troupeau dans l'alpage du quadrillage pourtant si riche, il laisse aller. Faut-il pour cela beaucoup de courage ? Mais non. Mais non. Maintenant, je sais que l'on y reviendra comme on est revenu à la parité (à propos des classes modulo 2).

Ainsi à partir de Serge de Buzet et sans faire ce qu'il avait fait, nous avons abordé, successivement, le damier, la parité, les classes d'équivalence, les multiples, les modulos, les couples, les bandes, les quadrillages, l'aire du rectangle et nous voici aux multiplications.

" L'essentiel, dit Pierre Macherey, est que l'ordre que la science institue est toujours provisoire. Il doit être sans cesse travaillé, confronté à d'autres types d'ordre. C'est ce passage d'ordre en ordre, par ruptures successives, qui définit le processus de la connaissance ".

Je note en passant que nous avions aussi l'occasion de revoir les puissances puisque certains enfants ont calculé les aires de plusieurs carrés. J'ai signalé en passant que c'était des puissances comme celles que nous avions connues au début de l'année.

Mais personne ne s'y est intéressé, personne ne s'y est arrêté. Je n'ai pas insisté parce que, maintenant, j'ai confiance : je sais que nécessairement, un ou plusieurs recoupements se produiront dans l'avenir.

Vous le constatez, chers camarades, j'ai bien changé. Naguère, j'aurais bloqué toute la classe et j'aurais tapé et retapé sur ce clou jusqu'à ce qu'il soit bien enfoncé. Et après j'aurais été bien avancé. Car, en faisant cela, je n'aurais pas fait autre chose et surtout j'aurais arrêté le moteur qui était en chacun de mes enfants. Et ils seraient devenus des véhicules mobiles mais plus automobiles. Alors, j'aurais dû les remorquer comme je le faisais autrefois, avec beaucoup de fatigue. Et quand je me serais arrêté, ils se seraient arrêtés sur leurs petites roues de fer, incapables de faire d'eux-mêmes un mouvement.

Heureusement, cela, c'est bien fini. Je ne tape pas à toute force sur un premier clou, puis sur un deuxième clou, puis sur un troisième. Non, je me soucie de voir se planter une infinité de clous. La vie les enfoncera.

Je ne bloque plus la classe parce que j'ai confiance. Je n'ai plus peur de ne pas remplir le programme parce que j'ai supprimé le programme. Oui, j'ai confiance ; si les enfants ont toute liberté de procéder à un tâtonnement innombrable, alors la moisson sera riche. Et si leur appétit s'agrandit en mangeant, alors je puis être tranquille et les laisser aller de l'avant.

L'essentiel au CE_1, c'est d'accrocher une première fois les notions, solidement, à partir de l' " intervention " du milieu ou à partir des créations des enfants, dans un climat affectif qui contribue à fixer les connaissances.

LES DEVINETTES EN X

Les enfants aiment jouer avec les inconnues.

Il faut le leur permettre. Voici quelques équations :

$x + 10 + x = 100 \longrightarrow x = 45$
$100 + x + x = 108 \longrightarrow x = 4$

Je ne sais comment cela s'est fait, mais le passage d'un terme dans un autre membre se fait sans douleur.

Exemple $90 + x = 100$

On peut barrer 90 à gauche à condition d'enlever 90 à droite.

J'ai, par la suite, sorti mes balances et montré qu'il fallait enlever une même quantité pour conserver l'équilibre ; mais c'était déjà assimilé.

$x + x = x \longrightarrow x = 0$ (Pierrick)

FRACTIONS

On devait y arriver puisqu'on a eu des équations du type

$x + x + x + x = 1$

Et comme on avait une expérience des partages on a partagé le cube de valeur 1 en 4 et ça faisait $\frac{1}{4}$

Alors on a eu :

$x + x + x + x + x + x + x = 7 \longrightarrow x = 1$

$x + x + x \ldots\ldots + x = 48 \longrightarrow x = 1$

$x + x + x + x + x + x + x + x + x = \frac{9}{10}$

$\longrightarrow x = \frac{1}{10}$

$x + x + x + 1 = 0 \longrightarrow x = -\frac{1}{3}$

$x + x + x = \frac{9}{9} \longrightarrow x = \frac{3}{9}$

$x + x + x + x = \frac{20}{20} \longrightarrow x = \frac{5}{20}$

$13\,x = \frac{13}{12} \longrightarrow x = \frac{1}{12}$

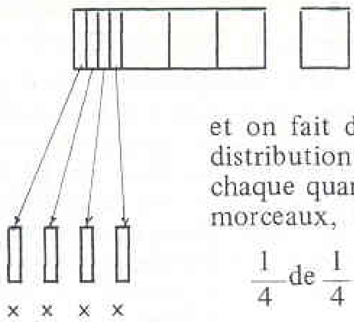
$x + x + x + x = \frac{1}{3} \longrightarrow x = \frac{1}{12}$

Comment a-t-on fait ici ? On a fait des tours de distribution. On a pris $\frac{1}{3}$ de barre de chocolat et l'on a coupé en 4 (fictivement) et ça faisait bien $\frac{1}{12}$

C'est classique évidemment et le maître habituellement fait cela une fois ou deux au tableau. Mais ici le tâtonnement a été beaucoup plus long, plus riche, plus étendu. On a pris le temps de tâtonner.

$x + x + x + x = \frac{5}{4}$ $\qquad x = \frac{5}{16}$

Comment fait-on ? On dessine les $\frac{5}{4}$



et on fait des tours de distribution en coupant chaque quart en quatre morceaux, ce qui fait

$\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ $(\frac{1}{16})$

Le premier quart fournit un morceau pour chacun des x et comme il y a 5 quarts

cela fait : $\frac{5}{16}$

Evidemment, c'est enfantin, la preuve c'est que des enfants de 7 ans le comprennent et trouvent cela facile. Ce qui l'est effectivement.

PROBLEMES

Il y a beaucoup d'inventions de problèmes et cette année, cela a démarré sur des factures fictives.

En voici quelques-unes .

Pierrick doit

100	vaches	105
150	cochons	100
200	vélos	200
200	oiseaux	012
240	corbeaux	201
200	pigeons	014
200	maisons	021
	Total	653

Monsieur doit

1 vache	30 F
1 cheval	60 F
1 charrette	80 F
1 ferme	100 F
	270 F

Nous avons beaucoup travaillé sur les factures parce que les enfants se plaisaient dans ce domaine.

Et j'avais de vraies factures dans mon portefeuille (Non pas des factures " préparées à l'avance ", mais " a posteriori "). Et les enfants se sont référés spontanément à " Jeanne achète " et au " Télex-Consommateur ". Et nous les regardions le soir.

Naturellement, de moi-même, je n'y aurais pas pensé. Ils avaient une longue expérience des tableaux de prix qui faisaient partie de leur vie de tous les jours. Et je ne songeais pas à l'éclairer par une réflexion critique de la classe. Mais en quel monde vis-je donc ? Je vis sur d'anciennes habitudes de travail alors que les enfants possèdent mille informations nouvelles auxquelles je ne pense pas, par manque de clairvoyance. Il faut partir de la vie, oui, mais c'est cela leur vie.

Et l'on peut dire que l'éducateur qui n'a pas vu la télé, eh bien ! il passe à chaque coup, à côté. Alors qu'à partir du tiercé, de Pollux, de bien des choses on peut inscrire, dans les esprits, des notions importantes.

Les problèmes posés nous ont permis de retrouver des structures que nous avions déjà abordées par l'abstraction du Cuisenaire ou par les inventions folleyantes.

Ça, c'est, je le crois, une idée nouvelle pour l'Ecole Moderne. Je passais pour un hérésiarque ; mais j'ai trouvé un soutien chez Bachelard.

Bachelard dit que les mathématiques sont réalisantes. L'esprit de l'enfant doit pouvoir jouer librement sans aucune contrainte, sans aucune référence obligatoire au concret, en plein ciel, pourrait-on dire. Et voilà que, subitement, il se pose et se promène sur terre comme s'il ne l'avait jamais quittée. Et comme Antée, il reprend de la force en s'appuyant sur le réel. Engels écrivait aussi que toutes les créations mathématiques des hommes trouvaient leur illustration dans la nature.

Mais il est dangereux de vouloir former l'esprit mathématique sur les seuls problèmes réels.

Cela ne veut pas dire qu'il faille les écarter, au contraire. Mais les problèmes réels naturels (je veux dire qui s'imposent vraiment à la classe sans sollicitation du maître), ne sont pas tellement nombreux. Et si l'on voulait en faire toute une nourriture, ce serait l'échec. C'est d'ailleurs la raison de l'échec du calcul vivant en dehors des petites classes. On ne sort pas des commissions, on tourne en rond. Allez ! aux maths, aux maths.

Vouloir faire comprendre le calcul en se référant à des choses de la vie c'est introduire des quantités de composantes parasites qui perturbent la compréhension. Tandis que pour la saisie de la structure de la division

$2x = 24 \longrightarrow x = 12$ c'est plus simple.

Et c'est certainement pour cette raison que les enfants de 7 ans préfèrent les problèmes d'algèbre " parce que c'est plus facile ".

Alors cela semble clair : la vie *au départ* avec toutes ses riches connexions..... *et à l'arrivée.* Mais, entre les deux, un dépouillement extrême. Songez à l'entraînement des footballeurs entre les matches. Les matches, c'est la *vie* riche avec ses multiples aspects (camarades, adversaires, public, arbitres, enjeu) mais l'entraînement (l'exercice) est beaucoup plus dépouillé et c'est dans le silence et l'austérité des terrains d'entraînement que se construit une *vie* plus réussie.

Je passe sur une aventure de crayons à bille de différentes couleurs qui serait un peu longue à raconter et au cours de laquelle on a parlé de vecteurs de la statistique et de machine à calculer. J'en ai expliqué le fonctionnement et le CE_1 et même le C.P. suivaient avec passion, cette histoire de cartons perforés. Et ils m'ont rappelé les cartes perforées de la Sécurité Sociale qu'ils font signer à l'école et les quittances d'électricité. Donc, ça fait partie de la vie.

On a trouvé que dans tous les problèmes il y a quatre éléments.

Il y a d'abord des *informations,*
puis les *questions* que l'on peut poser,
puis le *programme* que l'on établit,
puis les *réponses* que l'on obtient.

Nous avons donc 4 secteurs de tâtonnement et pour chaque création, nous pouvons critiquer les divers aspects : insuffisance de l'information, impertinence des questions, erreurs des programmes, impertinence des réponses.

ENONCES

Certains énoncés sont très révélateurs de la personnalité de l'enfant.

Voici, par exemple les textes de Patrick qui avait été mis aux boîtes enseignantes parce qu'il était jeune et " peu perméable à l'expérience ".

Mais il avait travaillé avec tant d'ardeur qu'il avait pu rejoindre le groupe des chercheurs. Il tâtonne sur le plan des énoncés et rit le premier de leurs insuffisances. Toute la classe rit également. Mais je m'aperçois qu'on peut tout de même en tirer quelque chose.

D'ailleurs, de toute chose ne peut-on faire son profit ? Et combien le travail sur des données que l'on fournit soi-même est profitable. Si Patrick fournit ses problèmes, c'est d'eux qu'il faut partir pour que *lui* progresse. C'est sa création, sa pensée qu'il faut éclairer.

" J'ai un verre, je le casse, je suis obligé d'en acheter un autre ".

DISCUSSION

$1 - 1 + 1 = 1$

Il y a un " paquet de zéro " (deux opposés).

" J'ai une boîte, elle est trouée. Je mets de l'eau, l'eau ressort par le trou ".

Insuffisance de l'information.

– Combien mets-tu d'eau ?

– 1 litre.

– Ah ! bon. Alors cela fait $1\ l - 1\ l = 0\ l$ *ou* $0\ l + 1\ l - 1\ l = 0\ l$

Vrai aussi pour x litres.

– J'ai un chien, je le vends, il ne reste plus rien : $1 - 1 = 0$.

– J'ai un chat. Il mange les souris.

Insuffisance de l'information. On ne peut rien demander parce qu'il n'y a pas assez de renseignements. Que ces problèmes portent sur les nombres 1 et 0 cela n'a pas d'importance. S'il y avait 1585 *l* ce serait la même chose. Les nombres importent peu. L'essentiel, c'est que la notion de nombres symétriques soit bien abordée.

PRODUIT CARTESIEN D'UN ENSEMBLE PAR LUI-MEME

(" Tables " de Pythagore)

Cette année, parce que j'avais 5 gauchers déclarés (et 3 cachés) j'ai pris conscience de l'importance d'une bonne " spatialisation ". Pour la favoriser j'ai permis un tâtonnement important sur le terrain (en gym : dans la classe et dans la cour) et un tâtonnement important sur le plan des structures abstraites. Pour ce dernier point j'ai introduit les échecs à 1, puis à 2, à 3 et même à quatre pièces (roi, dame, tour, fou). Nous avons organisé des rencontres et pour cela nous avons dû créer des poules comme les poules de Rugby de Télé-Dimanche. (Toujours la vie).

Il y avait 4 joueurs : Pierrick - Rémi - Michel - Robin. Comment organiser les matches avec les blancs, puis avec les noirs.

J'ai été stupide : j'aurais dû les laisser tâtonner pour monter cette structure. Au lieu de cela, je leur ai proposé le tableau suivant qui a été bien accepté parce que nous l'avons dessiné à la craie sur le plancher.

		BLANCS			
		Pierric	Rémi	Michel	Robin
NOIRS	Pierric				
	Rémi				
	Michel				
	Robin				

Successivement les joueurs noirs se détachent du groupe de gauche pour venir assurer leurs parties blanches contre les 3 autres. Par exemple, Pierrick qui ne rencontre pas Pierrick vient se présenter devant Rémi, puis Michel et enfin Robin.

Nous avons mimé ces rencontres successives en marchant dans les cases du plancher et en tenant à la main les pièces blanches ou noires. Cela a été parfaitement compris. (Par la suite nous avons examiné les résultats de foot de Trégastel).

J'ai été étonné de voir combien les enfants comprenaient cela facilement. Ils trouvaient cela tout naturel.

Aussi, lorsque à quelque temps de là Michel a inventé sa " table de Pythagore " de l'addition nous avons pu nous référer immédiatement à ce que nous possédions déjà.

Et cette fois, les joueurs c'était : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Et la relation n'était plus " faire un match avec " mais " additionner à ".

Nous avons observé la création de Michel et comme, là encore, il avait colorié les pairs en rouge, nous avons vu les diagonales (ici ce sont les doubles qui sont en diagonales - dans la vraie table de Pythagore avec la relation × ce sont les carrés).

Michel avait si bien compris cette histoire de diagonales qu'il a commencé un second tableau en commençant par le milieu.

Relation +	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Rémi a tenté d'imiter Michel, mais manifestement il n'avait rien compris. Mais quinze jours plus tard il s'est rattrapé en inventant la vraie table de Pythagore après une discussion sur les classes zéro, c'est-à-dire les classes des nombres qui, divisés par un autre nombre, ne donnent pas de reste. Nous avions travaillé sur les multiples et même sur les multiples communs découverts par Jacques. En effet, il y avait eu une crise de multiples et on avait étudié ce que chacun avait trouvé.

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	*24*
0	3	6	9	12	15	18	21	*24*				
0	4	8	12	16	20	*24*						
0	6	12	18	*24*								
0	8	16	*24*									
0	12	*24*										
0	*24*											

Le lendemain, Rémi a repris *tous* les multiples et découvert la table de Pythagore. Et le surlendemain il a recommencé mais cette fois, verticalement. On a comparé les deux tables : c'était les mêmes.

Seulement l'une avait les nombres de 8 x 17 et l'autre de 11 x 15.

Ce n'est pas étonnant : c'est comme le tableau des échecs (1) avec cette différence que, ici, la relation c'est " multiplier par " au lieu de " rencontrer " ou de " additionner " comme dans le tableau de Michel.

L'an dernier, j'avais proposé aux enfants de chercher aussi les tables de – et de : ou, si l'on veut, le produit cartésien de l'ensemble des premiers nombres par lui-même (–, :). Mais cette année, je ne propose rien : je ne fais que tout accepter. Si personne ne suit la piste que moi, le maître, je voyais s'ouvrir, cela n'a pas d'importance. Si nous ne faisons pas ce que j'avais entrevu, c'est que nous faisons autre chose. Cela se recoupera bien un jour ou l'autre.

DISCUSSION D'OPERATIONS

Une chose à laquelle je ne pouvais m'attendre, c'est bien à celle-là. C'est Jacques (encore lui) qui a introduit des inconnues dans ses additions. Cette simple modification nous a ouvert de vastes perspectives. (Il en est toujours ainsi : c'est toujours un simple pas à côté qui permet de sortir du monde où l'on vivait et d'accéder à un nouveau monde. Et, dans une classe créatrice, il y a beaucoup d'occasions de " pas à côté ", soit par suite d'une modification volontaire, soit par suite d'une erreur, soit par suite d'une transposition ou d'un rapprochement de deux choses que l'on n'avait pas encore vues ensemble. Si bien que l'on ne tourne jamais en rond : on prend toujours la tangente d'une façon ou de l'autre).

Voici
$$\begin{array}{r} h\ 6\ 7 \\ +\ h\ x\ 7 \\ \hline 9\ 8\ 4 \end{array}$$

h + h = 9. Or, il n'y a pas de chiffre 4 1/2. Donc, il y a une retenue. Mais il faudrait que 1 + 6 + x = 18. A ce moment-là, il faudrait que x = 11. Or x ne peut aller que jusqu'à 9.

Pour que ce soit possible il faut que un 8 remplace le 6,

soit
$$\begin{array}{r} h\ 8\ 7 \\ +\ h\ x\ 7 \\ \hline 9\ 8\ 4 \end{array}$$

(1) Cette fois, la référence c'est le tableau d'échecs.

Voici encore

$$\begin{array}{r} h\ i\ h \\ +\ h\ i\ h \\ \hline 25\ 9\ 2 \end{array}$$

Ce n'est pas bon parce que pour i + i, il faudrait une retenue pour faire 9. Et comme h + h = 2, ce n'est pas possible.

– Mais non, dit Robin (l'auteur) h c'est 6.

– Ah ! bon. Donc i c'est 4. Mais h + h (6 + 6) ça ne fait pas 25.

Mais l'auteur ne se trouble pas pour si peu.

– Mais non i c'est 9 et il y a une retenue sur h + h.

Mais pour 1 + h + h = 25, Robin est obligé de s'avouer vaincu. Et d'ailleurs 25 dépassait 19. Mais par deux fois Robin avait su parer la critique. Ce sont de telles discussions sur le fond qui aiguisent l'intelligence et permettent de bien comprendre les opérations.

Les enfants aiment ces discussions d'opérations qui ménagent toujours des surprises.

10, C'EST " UN, ZERO "

A propos de surprise, j'en ai eu une et de taille. C'est Jacques celui du C.P. qui l'a provoquée. Il s'est mis à écrire les dix premiers nombres dans les divers systèmes. Et après quelques tâtonnements il a mis le tableau suivant sur pied.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Système 2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
S 3	1	2	10	11	12	20	21	222	100	101
S 4	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22
S 5	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20
S 6	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14
S 7	1	2	3	4	5	6	10	11	12	13
S 8	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12
S 9	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11
S 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S 11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Qu'est-ce que c'est ?

– C'est simplement le tableau de la division des 10 premiers nombres (sauf 1). Et on écrit le quotient et le reste (ou les restes).

Ainsi 5 : 4 c'est 1 et il reste 1.

Donc 5 s'écrit 11 dans le système 4.

Dans le système 2, *5* divisé par 2 donne *2* reste 1, mais *2* divisé par 2 donne *1* et il reste 0, 5 s'écrit donc 101.

Mais moi, j'acceptais très bien que 2, 3, 4, s'écrivent 10 dans les systèmes 2, 3, 4.

Mais quand j'ai vu que 10 s'écrivait 10 dans le système 10 j'ai été surpris.

Ainsi ce dix si chargé affectivement (10 sur 10 à l'école - le 10 de trèfle - un billet de dix mille francs etc.) c'était un banal " un, zéro ". Quelle surprise provoquée par un garçon du C.P. Et quel avantage pour lui de pouvoir naviguer si aisément dans l'océan de la numération !

Voici pour en terminer avec les systèmes de numération quelques inventions de Patrice et Christian.

230	560	1000000000	2
4 | 8	2 | 0	7 | 4	0 | 0 | 1
928	1120	7000000004	1

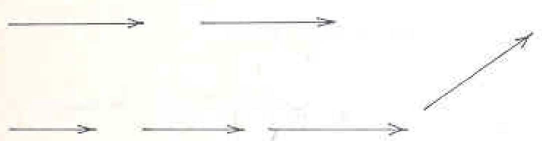
VECTEURS ET COORDONNÉES

Au retour de Perpignan, j'étais bien décidé à verser les vecteurs dans le creuset de la classe. A ce propos, il faut que je précise ma position. Jusque-là, j'avais fait presque uniquement (à 95 % au moins) de l'enseignement a posteriori. Je n'avais pour ainsi dire rien proposé. Mais j'avais tout accepté. J'avais été étonné de ce que les enfants nous avaient permis d'aborder. Mais, en fin d'année, j'ai voulu sonder les possibilités des enfants pour deux ou trois domaines particuliers. Ayant déjà obtenu des certitudes sur la possibilité d'une pédagogie de la création au CE_1, je voulais acquérir d'autres certitudes sur le niveau de compréhension des enfants. Et j'étais prêt à examiner l'attitude des enfants devant certaines structures qui n'étaient pas habituellement de leur niveau.

Mais pour les vecteurs, je n'ai pas eu d'effort à faire. En effet, les dessins de mes enfants représentent souvent des westerns. Et les flèches y volent de toutes parts.

J'ai dit : " On pourrait ne dessiner que les flèches, que l'on pourrait appeler vecteurs ".

Voici la première création de Pierrick.

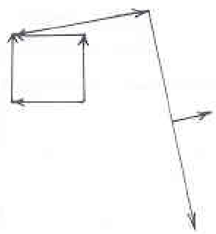


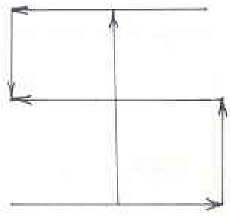
CONSTATATIONS

Ils sont tous horizontaux, sauf un.

Ils ne sont pas de la même longueur.

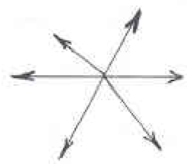
Voici d'autres créations :





Il y a des vecteurs qui se touchent, qui se suivent, qui sont à angle droit (perpendiculaire), qui sont égaux, qui sont égaux en longueur mais pas de même sens.

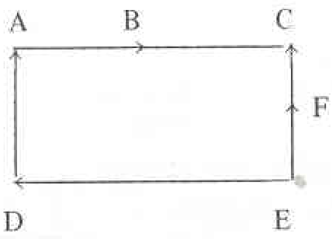
Voici



" *C'est une roue, les vecteurs partent tous du même point. Mais ils sont inégaux. S'ils étaient égaux on pourrait faire une roue en fer. C'est comme l'aiguille du réveil* ".

Alors nous avons examiné l'aiguille du réveil et ses diverses positions.

Ainsi, en partant d'une construction dans l'abstrait, nous débouchons sur le réel. Et cela, c'est constant (Et je le répète constamment pour les camarades qui doutent).



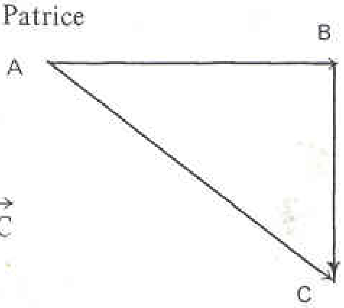
$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DA}$ (même longueur, même sens) mais

$\vec{ED}$ différent de $(\vec{AB} + \vec{BC})$ (sens contraire)

$\vec{AB} + \vec{BC} = -\vec{ED}$

Je ne livre pas ici toutes les créations car elles sont très nombreuses.

Mais voici de Patrice



$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

AB + BC = AC c'est faux du point de vue de la longueur mais

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

c'est juste du point de vue du déplacement.

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (vecteur nul)

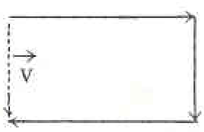
$\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ $\quad\quad$ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Pierrick a dit $\vec{0}$ est un neutre, il ne change rien.

Michel dit :

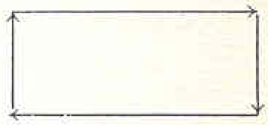
– Et si on faisait ça, qu'est-ce que ça ferait ?

– Ça ferait une addition de vecteurs, ça ferait $\vec{v}$



Mais alors si on faisait le tour, ça ferait zéro ? Mais oui.

Qu'est-ce que cela fait ?



Michel dit $\vec{u} + \vec{v}$

– Oui, et plus quoi encore ?

Pierrick répond $+ (-\vec{u})$ et l'autre c'est $-\vec{v}$

Alors on a

$\vec{u} + \vec{v} + (-\vec{u}) + (-\vec{v})$

Jacques dit : il y a des opposés : on peut faire des paquets de zéro.

$\vec{u} + (-\vec{u}) + \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ (vecteur nul)

Aussitôt Patrice s'écrie :

Eh bien ! on a fait ça à Morlaix. On cherchait la gare, on passait par quatre rues et on se retrouvait au même point. On avait fait vecteur nul (toujours le rappel de la vie).

Mais Michel veut en savoir plus long, il dit :

– Si on fait deux tours ça fait encore $\vec{0}$ *?*

Mais oui

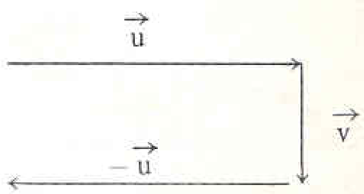
$\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} - \vec{v} + \vec{u} + \vec{v} - \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$

ou $2\,(\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$

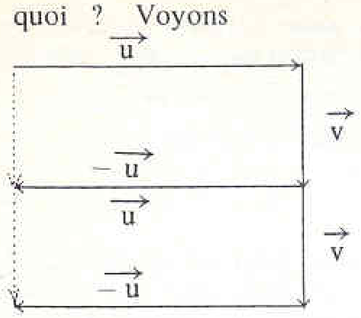
Et 3 tours $= \vec{0}$ et 4 tours $= \vec{0}$

et 1 000 tours $= \vec{0}$

– Et deux fois comme j'avais demandé ?



Ça fait quoi ? Voyons



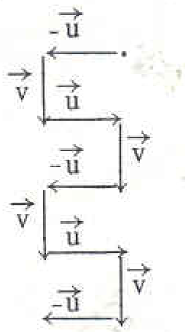
Ça fait $2\vec{v}$

Moi, je le savais sans le dessin dit Pierrick à cause des paquets de zéro

$$(\vec{u} - \vec{u})$$

$$\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} + \vec{u} + \vec{v} - \vec{u} = 2\vec{v}$$

– Ah ! bon et ça ?



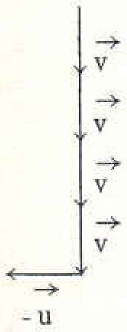
Pierrick dit :

Il y a des opposés et Jacques dit cela fait

$$4\vec{v} + 2\vec{u} - 3\vec{u}$$

$$= 4\vec{v} - \vec{u}$$

On aurait pu faire seulement



On aurait gagné du temps.

Mais Rémi dit :

– On aurait pu commencer par $-\vec{u}$, on serait arrivé au même point.

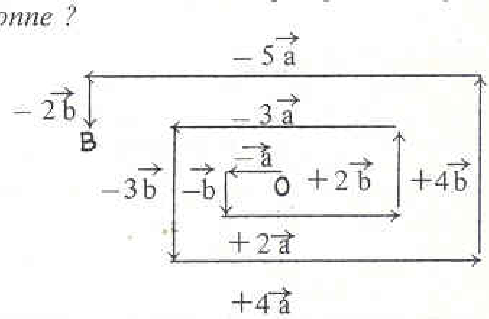
On peut vérifier dans la classe.

– Oui, l'addition des vecteurs est commutative :

$$4\vec{v} - \vec{u} = -\vec{u} + 4\vec{v}$$

Mais Michel, décidément passionné de vecteurs, dit :

– Et maintenant, avec ça, qu'est-ce que ça donne ?



$$-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{a}$$
$$+ 4\vec{b} - 5\vec{a} - 2\vec{b} = -3\vec{a}$$

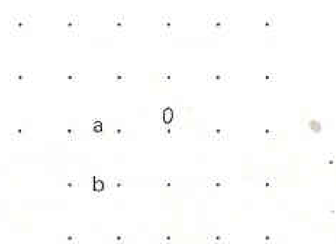
Discussion. Tout ce chemin pour $-\vec{3a}$.

Ce n'était pas la peine !

Nous vérifions dans la classe et nous voyons que Daniel qui va du point 0 au point B a fait au total le même déplacement que moi qui tourne autour des tables de la classe.

En regardant sur le livre de Papy, je propose de remplacer les tables par des points.

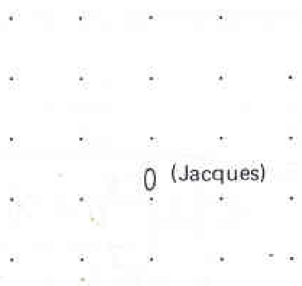
Voici ce que ça donne :



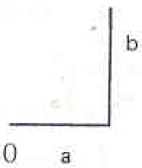
C'est le départ de toute notre expérience des coordonnées cartésiennes en prenant les tables comme points et non plus les coordonnées au tableau comme nous l'avons fait l'année passée.

Et le point origine c'est la table de Jacques du C.P.

Et nous pouvons dessiner les tables de chacun au tableau



Et chacun peut chercher ses coordonnées en cherchant ses *a* et ses *b* comme dans le livre de Monsieur Papy.



Mais puisque je parlais de vecteurs, j'en viens à la relation de Chasles ;

Je passe sur les tâtonnements, les découvertes, bref sur tout le cheminement qui nous a permis d'arriver si près de la " Relation de Chasles " que je me suis dit :

" Eh, pourquoi pas ? "

Voici trois points . . .

A B C

Mais pour comprendre la suite, il faut que je vous dise que j'avais rapporté à la classe une critique de mon fils Hervé. Il m'avait dit :

– *Tu ne vas pas me faire croire que quand quelqu'un veut aller de A à B il s'amuse à passer par C.*

Patrice s'exclame :

– *C'est vous qui avez raison, Monsieur. Ainsi, l'autre jour, ma mère voulait acheter une crêpière à la quincaillerie. Mais elle était distraite : elle est arrivée à la pharmacie, elle a dit :*

– *Qu'est-ce que je fais là ? Il faut que je revienne en arrière.*

Ainsi pour aller d'un point à un autre il y a deux routes : la route directe et la route distraite. Donc trois points

. . .

A B C

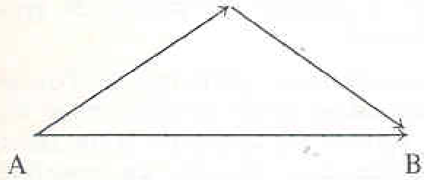
Et six animaux (2 à chaque point)

		DIRECT		DISTRAIT
Nous partons de A	Souris va en C	$\overrightarrow{AC}$	=	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
	Hérisson va en B	$\overrightarrow{AB}$	=	$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
Nous partons de B	Tortue va en C	$\overrightarrow{BC}$	=	$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
	Ours va en A	$\overrightarrow{BA}$	=	$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$
Nous partons de C	Renard va en B	$\overrightarrow{CB}$	=	$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$
	Poule va en A	$\overrightarrow{CA}$	=	$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

– Oh ! Monsieur, pour la route distraite, au milieu il y a toujours la même lettre. Pourquoi ?

Nous avons cherché et nous avons compris que pour aller d'un point à un autre on peut y aller directement.

Si on passe par un troisième point, la tête du premier vecteur devient le pied du deuxième vecteur. Et l'on a $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.



Philippe (C.P.) dit : *" Moi, mon père est chauffeur de car. Il fait Trégastel-Lannion en passant par Perros. Mais, quelquefois il va directement de Lannion à Trégastel. "*

Examinons :

(De Lannion, il y a aussi Trégastel direct et Perros-Guirec direct Hi ! hi ! hi!)

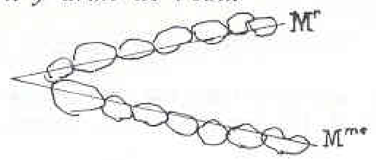
$$\overrightarrow{LT} = \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PT}$$

Vous voyez comme les enfants cherchent toujours à réinvestir dans le réel ce qui a été construit dans l'imaginaire.

Mais il y a parfois des obstacles.

Je raconte :

" Madame Le Bohec et moi nous cherchions un trou de homard dans les rochers. C'est Madame Le Bohec qui l'a trouvé, mais je n'ai pas pu la rejoindre parce qu'il y avait de l'eau.



– Si, en nageant.

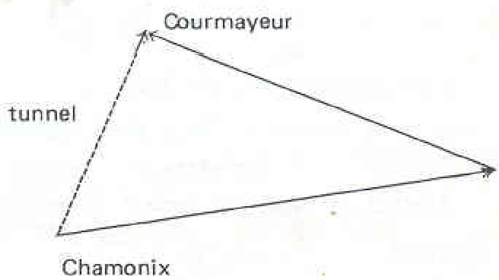
– Non, l'eau était trop froide.

– Il fallait y aller quand même. Hi ! hi ! hi ! "

Patrice : *" Moi, c'est mon père qui voulait aller dans son bateau. Mais il avait fallu qu'il fasse tout le tour par la digue alors qu'il n'y avait que dix mètres à traverser. "*

Jacques : *" Moi, quand j'irai en Italie je prendrai la route directe parce que je passerai par le tunnel du Mont-Blanc. "*

– C'est ça, on peut passer au travers des obstacles au lieu de faire tout le tour.



Robin : *" Quelquefois, on change de car à B.*

Et on fait $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ au lieu de $\overrightarrow{AC}$.

– Et aussi, quand on fait du stop. Mon frère...

– Oui, oui, la Relation de Chasles, on la trouve partout dans la vie.

A ce moment, Michel nous ramène aux points du livre de Monsieur Papy et aux tables que l'on peut représenter par des points. Je remplace les a et b du livre par x et y.

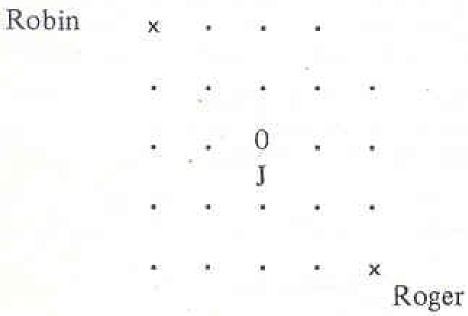
Chacun cherche ses coordonnées.

Il vient les montrer sur le dessin du tableau. Et il les écrit sur son carnet de maths.

Il y a des découvertes.

– *Moi,* dit Robin, *je suis comme Roger pour Jacques, mais je suis de l'autre côté.*

– *Vérifions. Montez tous les trois sur votre table. Tiens, c'est vrai.*



– *C'est symétrique,* dit Rémi.

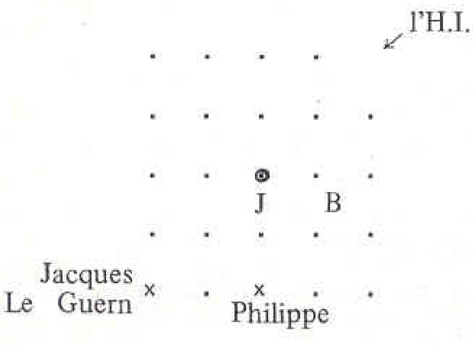
J'en reste confondu. Mais alors, où vont-ils m'entraîner ? Je leur crie :

– *Arrêtez, arrêtez, j'ai peur !*

Ils rient :

– *Non, non, on continue.*

Et chacun de chercher son symétrique par rapport à Jacques Bonny. Mais Jacques Le Guern découvre qu'il n'a pas de symétrique.



Mais Patrice :

– *Si, c'est l'Homme Invisible.* (Il avait vu un film à la télé. Et ainsi il introduit l'imaginaire).

Philippe dit :

– *Moi je suis aussi symétrique de l'Homme Invisible.*

Discussion.

– *Mais non, c'est Jacques Le Guern.*

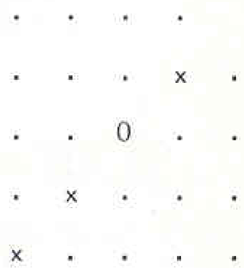
– *Oui, mais moi, ce n'est pas par rapport à Jacques Bonny, c'est par rapport à Brient (B).*

– *Oh ! là là, ça se complique. Si on se met à changer les points de symétrie maintenant.*

Naturellement, on le fait. Et l'on monte sur les tables pour vérifier. Mais les enfants sortent du cadre de leurs tables, et parlent de mon bureau, du chauffage et l'on se dirige ainsi vers le plan de la classe auquel je ne songeais évidemment pas. Oui, on peut aller de l'avant, on arrive toujours quelque part.

FAMILLE DE POINTS

Mais voici que quelqu'un remarque que Jacques Le Guern - Pierrick - Jacques Bonny-Gilbert sont sur la même ligne.



Nous étudions les coordonnées de ces points

$(-2, -2)$ $(-1, -1)$ $(0, 0)$ $(+1, +1)$

– *C'est parce que les y sont pareils que les x.*

Je dis :

– C'est la famille y = x. Alors ceux de la première rangée qui sont aussi en ligne droite, c'est quelle famille ?

Cherchons leurs nombres (je dis indifféremment leurs nombres ou leurs coordonnées pour les habituer au terme)

Robin (–2 +2) Pascal (–1 +2)

Didier (0, +2) Marc (+1 +2)

– Ce n'est pas difficile c'est y = +2

```
R P D M
× × × ×

. . . . .

. . 0 . .

. . . . .

. . . . .
```

Mais ils veulent savoir : l'autre diagonale ?

```
× . . .

. × . . .

. . × . .
    0
. . . × .

. . . . ×
```

Cherchons (–2 , + 2) (–1 , + 1) (0, 0)
(+ 1, – 1) (+ 2, – 2)

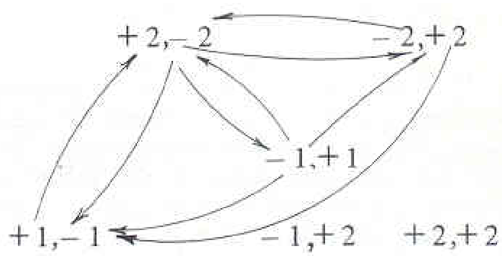
C'est la famille des opposés : y c'est le contraire de x. Je dis y = –x. C'est accepté et même compris. Mais j'ajoute pour que cela soit plus complet, au lieu de (0, 0) il faudrait dire (+ 0, – 0)

– Ou – 0, + 0, dit Patrice. *C'est la même chose puisque c'est zéro.*

J'apprécie.

A ce moment, nous cheminions également sur le chemin de la théorie des ensembles. Et à la suite d'un travail sur le tri des chaussures de la classe (chaussures hautes, chaussures basses, en toile, non en toile, en cuir, en caoutchouc), je leur ai mis au tableau des coordonnées de points pour voir ce que cela allait donner. Je ne m'attendais pas à trouver ce que nous avons trouvé et surtout tant de compréhension (principalement de ma part).

Voici ce que cela a donné :



Chacun est venu établir une relation entre les points qu'il voulait.

Ci-dessus, c'est la relation de Michel. Il a choisi ses points parce que c'était des opposés (ou symétriques).

– C'est facile, on la connaît c'est la relation y = – x.

Robin : *Moi, je choisis d'autres points*

(+ 2, – 2) – 2, + 2 + 2, + 2

C'est facile, il n'y a rien que des 2. Vérifions sur le tableau.

Il aurait pu en mettre un autre – 2, – 2

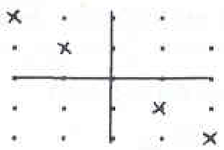
```
× . . . ×

. . . . .

. . 0 . .

. . . . .

. . . . ×
```

– Moi, dit Pierrick, je prends tous les points sauf + 2 + 2. Pourquoi ?

– Parce que celui-ci n'a pas de – et tous les autres en ont.

– Et (+ 1, – 1) (+ 2, – 2) (– 1, + 1) (– 2, + 2) ?

Vérifions sur le graphique,



Je leur montre qu'il n'y a personne dans les secteurs à coordonnées de même signe. Je ne sais s'ils ont compris. Mais moi j'ai compris. Ainsi, à 45 ans je découvre que les points d'un plan peuvent être unis par une relation. Et 1 même point peut rentrer dans des relations différentes.

– Comment, tu ne le savais pas ?

– Non, j'en étais simplement informé. Maintenant, je l'ai redécouvert, je le sais définitivement.

C'est fou ce que j'apprends avec mes enfants. Cela provient du fait que, au lieu de suivre passivement un professeur, je dois avoir l'esprit en alerte pour répondre à la demande.

Vous avouerai-je que je suis un peu effrayé quand je vois sur quelle piste je me suis laissé entraîner. Heureusement je puis me dire : – Mais non, ce n'est pas de la folie, puisque à chaque instant, tu peux revenir au réel, c'est-à-dire à la position des tables dans la classe. – Ah ! bon, ça me rassure.

Mais ce que je découvre, c'est l'aisance des enfants dans ce domaine. Ils se situent bien, dans la classe, dans la cour, au tableau, sur leur carnet. Ça, c'est positif. Et nous avons toujours, si besoin est, la référence du réel.

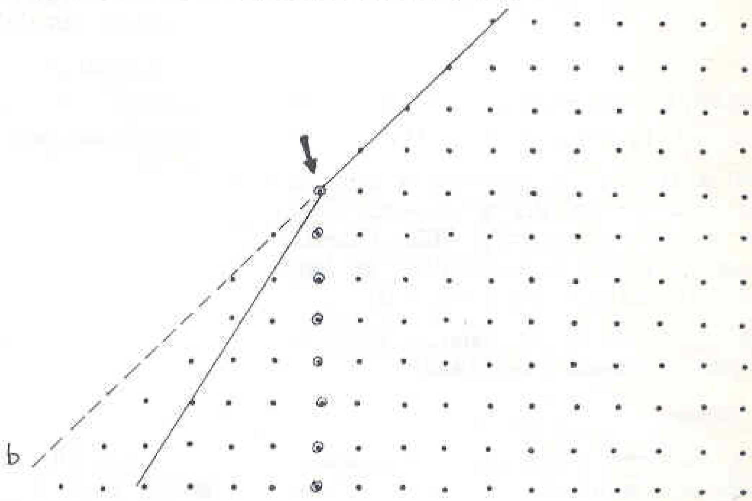
Il n'empêche que je tremble. J'essaie de sonder les possibilités de compréhension des enfants de cet âge.

Mais j'entrevois l'infini et je me dis : – Si les enfants peuvent aborder cela à 8 ans (avec l'aide du réel) est-ce que les programmes ne sont pas à bouleverser de fond en comble ?

Et nos conceptions pédagogiques ?

Heureusement, nous sommes le 15 juin. Plus que 3 semaines de classe. J'espère bien qu'on va ralentir un peu notre activité mathématique d'exploration et que l'on va souffler un peu. Oui, on ralentit. Et on s'arrête à la création de 0, 0 (Jacques Bonny C.P.)

Je reproduis ce dessin au tableau et les commentaires démarrent :



Patrice : *Monsieur, ce n'est pas droit. On aurait dû continuer tout droit (ligne en pointillée dessinée par moi P. L. B.)*

Philippe : *Ça devait arriver là (point b P. L. B.)*

Pierrick : *Non, ça devrait faire la diagonale jusqu'au coin en bas.*

Jacques CE_1 *se met à compter jusqu'à 8 : il dit 8 points rouges (j'avais dessiné tous les points en rouge au tableau). Alors, sans rien dire, je dessine des traits qui joignent les points, en blanc.*

Pierrick les compte : il n'y en a que 7.

– *Alors quoi c'est 8 ou c'est 7. Il faudrait s'entendre.*

– *C'est 8, c'est 7, c'est 8, c'est 7.*

On recompte 8 points, 7 traits.

– *Pourquoi ?*

Rémi : *Parce qu'il y en a à chaque bout.*

– *Et alors ?*

– *Et alors, ça fait pas des couples complets.*

– *Quels couples ?*

– *Les couples rouge-blanc (coïncidence, c'est la troisième fois que nous avons affaire à des couples rouge-blanc - réglettes de Rémi, carrés de Robin).*

– *Alors, comment faire ?*

– *Il faut supprimer un point rouge en haut.*

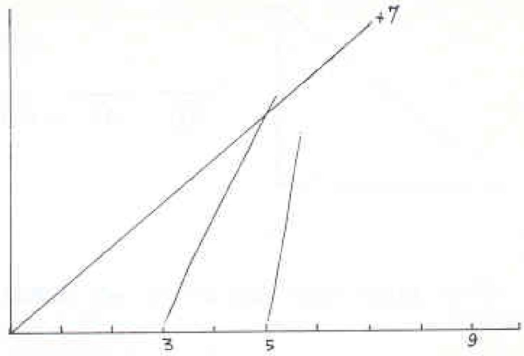
– *En bas, plutôt, parce que c'est la ligne des zéros.*

Et voilà, on retombe sur nos pattes et sur la ligne des ordonnées nulles qui est, dans la classe, la ligne : Patrice, Michel, Jacques, Brient, Serge. Et sur les coordonnées dérivées du livre de Papy.

Jacques dit : *C'est le point + 7 puisqu'il est à 7 de la ligne des zéros.*

Michel : *Il est sur la ligne des points + 7. Comme Michel, Didier, Marc et Pascal sont sur la ligne des + 2.*

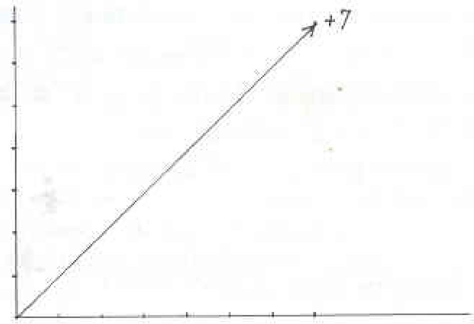
Maintenant je rectifie le trait tracé par Jacques en le rendant rectiligne sur toute sa longueur.



Et pour leur faire une farce, je dis : Je vais retrouver ce point + 7. Mais je pars successivement des abscisses + 3, + 5, + 9. Et naturellement, je n'aboutis jamais au point. Cela les inquiète. Mais ils trouvent vite la solution. Et après une courte discussion sur la ligne des zéros verticale, ils trouvent que c'est le point + 7, + 7.

Mais comment y va-t-on à ce point en partant de Jacques (0, 0).

On y va directement. J'appuie sur ce mot.



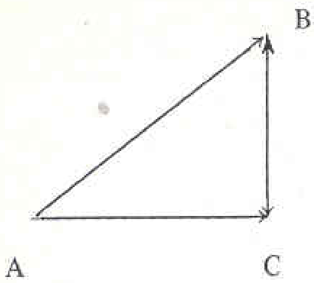
– *DIRECTEMENT ?*

– *Oh ! mais il y a peut-être aussi une route distraite.*

– *Eh bien ! cherchez-la.*

Après un long tâtonnement, ils parviennent à la seule route que je veux qu'ils découvrent. Parce que nous sommes dans la société qui a choisi cette route.

Et nous retrouvons l'addition de vecteur



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Alors pour tous les points on donne d'abord

$\overrightarrow{AC}$ (x) et $\overrightarrow{CB}$ (y)

Le lendemain, j'avais invité un contrôleur de P.C. Il était très critique et très sceptique. Il ne s'est pas arrêté à l'apparence. Il a interrogé, il a fouillé. Mais la démonstration a été brillante.

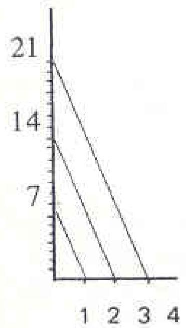
Oui, les enfants comprennent les x et les y.

Oui, ils savent reconnaître leur place sur le plan du tableau. Et la place de leurs camarades.

Ils savent trouver les coordonnées d'un point.

Ils connaissent la droite $y = x$ et la droite $y = -x$.

Ils savent pourquoi on a choisi Jacques Bonny comme origine et non pas Jacques Le Guern (on n'aurait eu que des coordonnées positives). Démonstration irréfutable. Le contrôleur s'est incliné.

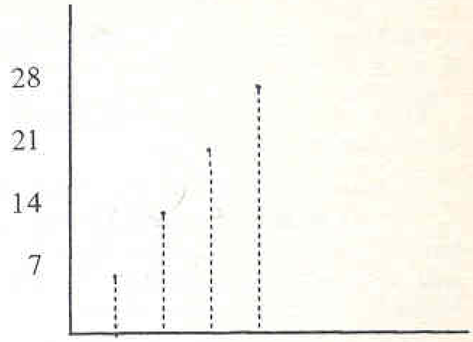


Mais voilà une création de Pierrick.

Je reste interloqué.

Qu'est-ce que c'est que ça ? A quoi cela pourrait-il nous mener ? (Tout simplement au théorème de Thalès). Mais je n'ai pas voulu en parler aux enfants.

Robin a repris la création de Pierrick :



– Le premier point c'est 7, le deuxième point, c'est 14, le troisième point c'est 21, le quatrième point c'est 28.

Alors je dis : *On va faire un tableau.*

1er	*2ème*	*3ème*	*4ème*
7	14	21	28 ...

Et ces quatre points, qu'est-ce que ça donne ?

– une ligne droite.

On pourrait prendre d'autres points.

– Ceux du calendrier (en triangle de juin).

– Bon, on va les mettre sur le graphique. Mais avant on va faire le tableau.

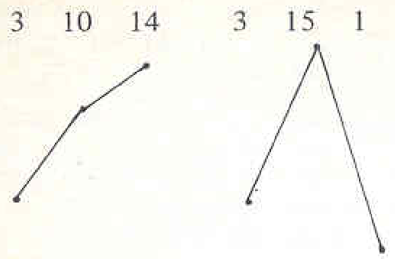
x	1	2	3	4	5
y	1	3	6	10	15

Et qu'est-ce que ça donne ?

– Un virage.

– On peut dire une courbe.

– Donnez n'importe quels nombres.



Oh ! la ligne a une drôle de tête.

Et le jeu se poursuit. On fabrique ainsi des oiseaux qui volent, des papillons, des bateaux.

Mais Rémi dit : 15 - 10 - 5.

– *Tiens, ce n'est pas n'importe quels nombres.*

– *C'est une famille. C'est modulo 5.*

– *Qu'est-ce que ça donne ? – Tiens, une droite.*

Rémi donne alors 1 - 8 - 15 - 22.

Encore une famille. C'est la famille " reste 1 " la classe $\dot{1}$ (modulo 7).

Ça donne encore une droite.

Alors c'est la crise des graphiques. Il y a d'abord un tâtonnement pour la bonne utilisation des lignes du carnet ; pour la place des unités sur les axes. Bref pour la précision.

Voici la création de Michel.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	10	1	3	3	3	4	8	12

Cela donne un graphique.

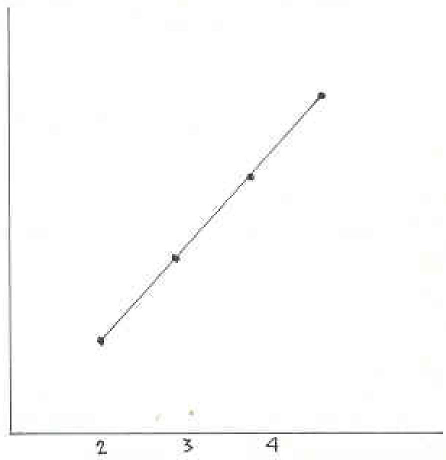
– *Monsieur,* dit Jacques, *c'est comme à l'hôpital, la température des malades.*

Et voilà ! Encore le retour à la vie.

– *Le premier nombre c'est le premier jour, le deuxième nombre pour le deuxième jour etc.*

– *Monsieur à la fin c'est une ligne droite parce que c'est la famille 4 - 8 - 12.*

Il n'y a pas besoin de faire le graphique : on voit que c'est une droite sur le programme. Mais pour les droites, certains enfants sentent que cela pourrait passer par l'origine.



Je dis : – *Ça me gêne parce que je vous ai appris les graphiques en disant qu'il y a le 1^er^ nombre et le 2ème nombre etc. Et là, ça me gêne.*

– *Il n'y a qu'à dire le zérotième.*

Puis on arrive au $\frac{1}{2}$ ème.

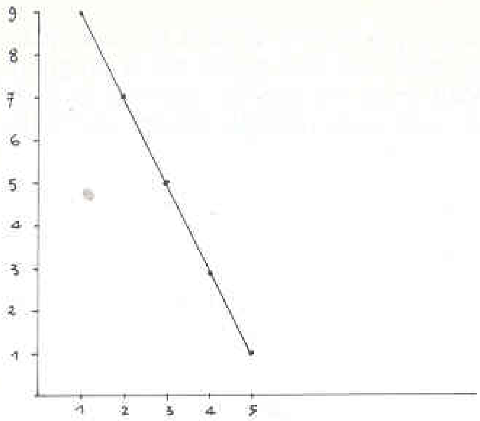
Alors on ne dit plus le rang des nombres on donne l'abscisse x et l'ordonnée y.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	
y	7	6	5	4	3	2	1	0	(Michel)

Ce qui est une extension dans l'abstrait d'une réalité concrète.

Mais voici que Jacques propose un drôle de programme

x	1	2	3	4	5
y	9	7	5	3	1



– Là aussi on peut continuer à descendre.

– Pitié ! Oh ! non, vous n'allez pas faire ça ?

– Si, si.

Et on découvre que le 6ème point c'est – 1. (Comme sur le thermomètre).

– Et quel est le modulo cette fois-ci ?

Rémi trouve aussitôt :

– C'est modulo – 2.

– Et pour Michel, c'était modulo – 1.

Et s'il faut maintenant que l'on s'intéresse à la pente des droites ! Il vaut mieux s'en tenir à cela. D'ailleurs le 9 juillet arrive à grands pas.

(A Vence, en septembre, Berteloot m'a dit :

– Pour moi, les graphiques traduisent un mouvement. C'est quelque chose de dynamique. Et ici ton histoire de 1er nombre, 2ème nombre, c'est un peu gratuit.

– C'est vrai. Mais c'est venu tout seul. Nous étions si près.

Et puis cela n'a pas été gratuit longtemps puisque à cette époque, après avoir vu un cadran solaire au cours d'une excursion scolaire, nous avons observé heure après heure, la marche de l'ombre du mur dans la cour. Et le mur des cabinets et le mur de la classe tenaient parfaitement lieu d'axes orthonormés.

Et l'on a très bien suivi la marche de l'ombre sur le sol. Et on l'a très bien comprise au tableau.

Et puis le graphique de température d'un malade, est-ce que ce n'est pas dynamique. Non, Berteloot, tu peux me croire. Rien ne reste jamais gratuit. Et l'on reçoit parfois mieux les vérités pour s'y être préparé.

– Allons de l'avant, il y aura toujours des applications pratiques.

C'est ce que pense Jean-Claude Killy quand il mime de la main, avant l'épreuve, la descente qu'il va accomplir et qu'il a besoin de se représenter mentalement, au préalable, pour mieux la recevoir.)

THEORIE DES ENSEMBLES

Je n'étais pas un fétichiste de la mathématique moderne. Et je n'allais pas bien sûr me précipiter sur les enfants pour leur faire avaler des diagrammes de Venn. Mais j'étais décidé à être objectif et à accepter de la mathématique moderne tout ce qui irait dans notre sens, tout ce qui nous ferait progresser. Evidemment la mathématique moderne, ce n'est pas la seule théorie des ensembles. Mais c'est aussi la théorie des ensembles. Et si elle peut nous rendre service, il faut la recevoir avec un grand sourire.

Fidèle à ma décision de partir des créations des enfants, j'ai attendu et je n'ai rien eu dans ce sens avant le 26 mars, jour où Didier du C.P. avait apporté des images qu'il s'est mis à trier spontanément.

Nous avons examiné son tri qui est devenu la référence de la classe et nous avons vu qu'il y avait trois sortes d'images : les hommes, les animaux, les paysages et que certaines images appartenaient à la fois à deux de ces groupes. Il y avait donc une intersection entre les ensembles. Ce que nous savions depuis l'année dernière, grâce à Sylvain. (Et l'an dernier aussi, le tri avait été imposé par la vie).

Je ne vais pas vous ennuyer avec ces diagrammes que l'on trouve partout maintenant, à tel point qu'on en a une indigestion. Mais je vais simplement vous faire part de quelques réflexions et découvertes à ce propos.

On peut dire que, dès qu'il s'agit de faire un tri, de classer, la T. des E. peut être très intéressante. Et cela se produit souvent.

Ce n'est qu'à partir du 30 avril que le tâtonnement expérimental sur les tris a été vraiment mis en place. Patrick a trié des cartes à jouer. Rémi a trié des images de soldats etc. Je me tenais à quatre pour ne pas proposer aux enfants de faire des tris dans la classe. Mais c'est venu tout seul : il y a eu un tri : culottes courtes – culottes longues. Puis ils sont passés aux blouses, aux chaussures, aux couleurs des yeux, des cheveux etc. Rien de sensationnel, sinon que c'était spontané.

Et puis, un matin, Patrice a dit :

– *Cette nuit, j'ai pensé à un tri. Venez ici Jacques - Jean-François - Michel etc.*

On se regardait tous. Quelle pouvait être la relation, cette fois ? On regardait les tissus, les lunettes, les souliers, les taches de rousseur. Aucune des relations que nous appliquions sur le tri effectué par Patrice ne " collait ".

Alors, il nous a dit : – *J'ai mis ensemble tous ceux dont le nom commence par Le : Le Guern, Le Gall, Le Calver, Le Maréchal, Le Meur etc.*

Quelle révélation ! Alors on s'est intéressé aux initiales des noms, des prénoms, des deux à la fois et à toutes sortes de choses plus ou moins saugrenues.

C'était une sorte de jeu de devinettes.

J'ai été étonné : il suffisait d'une simple relation pour diviser le monde et les relations étaient de tous ordres. Mais je n'étais pas au bout de mes surprises.

Naturellement on est passé aux tableaux dont on avait l'expérience et aux graphes.

Voici un exemple de tableau :

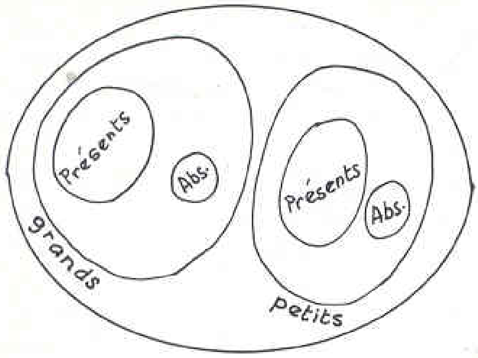
	Présents	Absents	Totaux
GRANDS	I I I I I I I I I	I	10
PETITS	I I I I I I I I I I I I I	I	14
Totaux	22	2	24

DERIVATION GRAMMATICALE

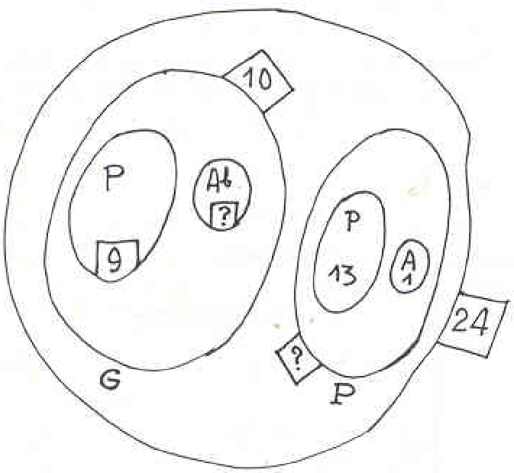
	homme	femme
1		e
plusieurs	s	es

Exemple de graphe

Elèves de la classe



A partir de cela on peut faire des problèmes. Exemples



On peut demander par exemple :

Combien y a-t-il de Grands absents ?

Combien y a-t-il de Petits dans la classe ?

Les enfants ont inventé des graphes et il fallait poser des questions et calculer des totaux, des différences etc.

Rien de bien sensationnel, sauf que cela venait des enfants qui traduisaient, par graphes, la réalité, ou retrouvaient la réalité à partir de graphes.

Je n'insiste pas. Tout le monde sait cela.

Mais un jour, Fanfan nous écrit le texte suivant (le 5 juillet, il était temps).

1 - Les oiseaux écoutent les corbeaux et les merles et les écureuils chantaient.

2 - Les corbeaux écoutent les oiseaux et les merles dansaient avec les écureuils.

3 - Les merles écoutent les écureuils et le merle chante avec les corbeaux.

4 - Les écureuils écoutent les merles et les oiseaux chantaient avec le corbeau.

Oh ! là là, que c'est compliqué !

Pour voir clair, il faut faire des graphes. Il y a trois relations

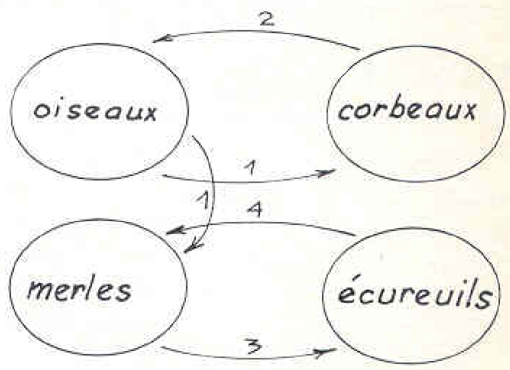
A relation : écouter

B relation : chanter avec

C relation : danser avec

Voici les graphes de ces trois relations

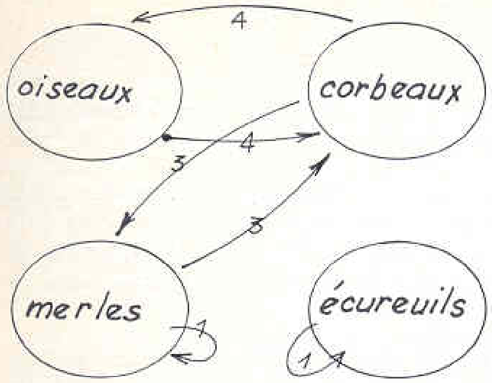
A - RELATION : ECOUTER



Constatations le 1 et le 2 sont symétriques, le 3 et le 4 aussi

Pour le 1 il y a deux flèches à partir des oiseaux.

B - RELATION : CHANTER AVEC



Remarques

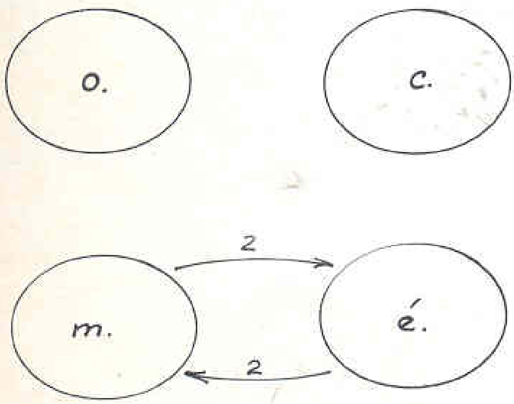
Dans le 1 les écureuils chantent avec eux (réflexivité)

Dans le 3 1 merle et tous les corbeaux chantent ensemble.

Dans le 4 1 corbeau et tous les oiseaux chantent ensemble.

Pour " chanter avec " il y a deux flèches mais pas pour " écouter ". On peut écouter quelqu'un qui ne vous écoute pas.

C - RELATION : DANSER AVEC

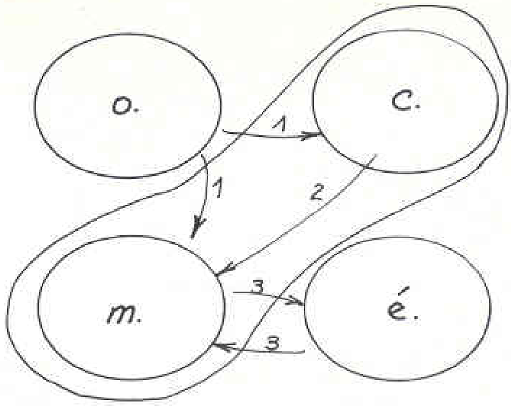


Mais Rémi critique nos graphes .

Les merles et les corbeaux ce sont aussi des oiseaux.

Alors il faut tout recommencer

Ecouter



Mais il y a encore des difficultés.

Est-ce que les oiseaux qui écoutent les merles sont : tous des oiseaux non-merles ou tous les oiseaux non-merles et non-corbeaux ?

Alors apparaissent les notions d'union et d'ensembles complémentaires.

Et surtout la signification du mot " autre " apparaît. L'ensemble complémentaire de l'Union des Ensembles des Merles et des corbeaux s'appelle l'ensemble des Autres oiseaux.

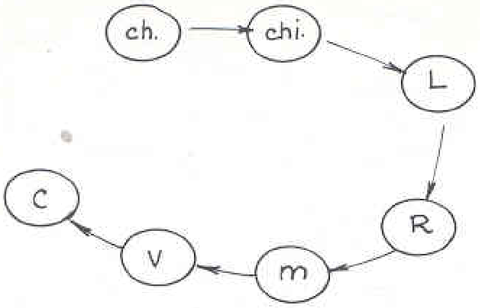
Que de perspectives cela m'ouvre ! Ainsi le verbe établit une relation. J'en étais informé. Maintenant, je le sais, c'est tout autre chose. Il m'a fallu le découvrir.

Il y a une liaison entre la grammaire et les mathématiques. Un graphe peut traduire un texte puisque en lisant le graphe je pouvais retrouver le texte.

Voici une autre invention de Robin

Les chats attrapent les chiens, les chiens attrapent les loups, les loups attrapent les renards, les renards attrapent les moutons, les moutons attrapent les vaches, les vaches attrapent les cochons.

RELATION : ATTRAPER



Il me semble que c'est le *qui* qui apparaît, il signale qu'il y a deux flèches c'est le loup. Le loup attrape.

$\longrightarrow$ loup $\longrightarrow$

Oh ! là ! là ! ma tête. Vivement les vacances !

A vous de me critiquer pour toutes les erreurs que je vous présente ainsi. Ce qui est certain c'est que l'an prochain la Théorie des Ensembles apparaîtra avant le 20 mars.

Ce qui est certain, c'est qu'il va me falloir encore et encore étudier. Heureusement que vous êtes là.

Mais quand donc saura-t-on tout ?

Je termine ici le récit de mon expérience.

Evidemment, je n'ai pas tout dit. Je n'ai pas parlé des tâtonnements, j'ai omis des transitions et des prolongements de nos découvertes. Je n'ai pas parlé du calcul vivant. Par exemple, je n'ai pas signalé un achat de divers crayons à bille qui nous a fait toucher du doigt les vecteurs de la statistique et qui a provoqué des tâtonnements sur les opérations de lignes.

Il aurait été certainement préférable de donner un compte rendu plus complet, plus soigné de notre expérience. Mais nous sommes pressés car, la rentrée, c'est après-demain. Chacun doit recevoir son morceau de plastic en temps utile. Au milieu de l'année, ce serait trop tard pour faire sauter le programme.

•

Mon expérience s'est modifiée en fin d'année. A ce moment, j'ai voulu sonder les possibilités " d'abordage " des enfants et j'ai, de ce fait, changé d'attitude.

Je tiens à le redire car je ne voudrais pas que ces trois dernières semaines détruisent le beau résultat obtenu à savoir que :

" On peut axer une année entière d'enseignement des mathématiques sur la création enfantine "

•

Malgré le risque encouru de ternir ma démonstration en devenant actif, je ne regrette rien.

En effet, j'ai peut-être acquis un résultat pour d'autres camarades. Si dans les grandes classes, au CES, au Lycée, en Fac, on voulait bien axer aussi l'enseignement sur les créations des élèves, avec le soutien du groupe (dont fait partie le prof) quels résultats n'obtiendrait-on pas ? Et dans la joie, dans l'élan, dans l'appétit !

N'y a-t-il pas une hiérarchie des moyens de la connaissance : informer (lire), voir, faire, découvrir ?

Or, dans certaines Facultés, on informe mal (il n'y a pas de polycopiés). On permet peu de voir (Les amphis sont bondés, les tableaux lointains, l'écriture petite). On ne fait pas beaucoup faire (même pas de boîtes enseignantes). Et surtout, on ne permet jamais de découvrir.

Ah ! si des expériences se déclenchaient également à tous les niveaux ! ! !

Voilà, j'ai craché mon venin. Je puis me retirer dans mon trou.

Je ne sonderai plus les possibilités des enfants. Je ne courrai plus de risques. Je me contenterai, uniquement, de pratiquer ma petite pédagogie " a posteriori ".

Mais, tout de même, une dernière fois :

" *Vive la mathématique libre !* "

Trégastel, 24 septembre 1966

P. LE BOHEC

TABLE DES MATIERES

La directrice de la publication : E. FREINET © Institut Coopératif de l'Ecole Moderne 06 - Cannes — Printed in France by Imprimerie CEL — Cannes — Dépôt légal : 2e trimestre 1969 — N° d'édition 162 — N° d'imp. 1249 — Prix du numéro simple 1,50 F